UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

El problema de Dirichlet y aplicaciones

Autor/es

ALEJANDRO DEL CAMPO LOPEZ

Director/es

MANUEL BELLO HERNÁNDEZ

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2019-20

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología

Grado en Matemáticas

TRABAJO FIN DE GRADO

EL PROBLEMA DE DIRICHLET Y APLICACIONES

Realizado por Alejandro del Campo López

Tutelado por Manuel Bello Hernández

Curso 2019-20

Resumen

Castellano

Dado un dominio U de $\mathbb{C}_\infty$ y una función continua ϕ en la frontera de U, ∂U, encontrar una función armónica h en U tal que $u|_{\partial U} = f$ es conocido como el problema de Dirichlet en los complejos. Esta cuestión se enlaza directamente con problemas sobre funciones holomorfas ya que estas tienen parte real y parte imaginaria que son funciones armónicas. Esta conexión permite estudiar muchos temas de Análisis Complejo utilizando técnicas de funciones armónicas.

En este trabajo se estudiarán las propiedades de las funciones armónicas y subarmónicas, que apoyarán el estudio de la existencia y unicidad de soluciones al problema de Dirichlet en dominios de $\mathbb{C}_\infty$. Además, se darán varios resultados de peso en Análisis relacionados con el estudio realizado sobre el problema de Dirichlet.

English

Given a domain U in $\mathbb{C}_\infty$ and a continuous function ϕ in the boundary of U, ∂U, finding a harmonic function h in U such that $u|_{\partial U} = f$ is known as the Dirichlet problem in the complex sphere. This issue is directly linked to holomorphic functions because their real and imaginary parts are harmonic functions. This connection allows for the study of many topics in Complex Analysis using techniques carried over from harmonic functions.

In this dissertation we will study the properties of harmonic and subharmonic functions, as they will support the study on the existence and uniqueness of solutions to the Dirichlet problem in domains of $\mathbb{C}_\infty$. Moreover, we will give key results in Analysis related to the research done on the Dirichlet problem.

Índice general

Introducción

En matemáticas, el estudio de los números complejos se consideraba absurdo hasta hace poco más de 200 años. Aunque por aquel entonces Cauchy ya había empezado a estudiar esta rama de las matemáticas, fue la visión que otorgó Riemann en su tesis doctoral *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* (Bases para una teoría general de funciones en una cantidad compleja variable) la que ha persistido hasta la matemática moderna.

En ella, se introducen las ideas de superficie de Riemann, función holomorfa, esfera $\mathbb{C}_\infty$ y el llamado principio de Dirichlet, así como un estudio de éstos, llevando a teoremas como el de representación de Riemann. El principio de Dirichlet fue nombrado así por Riemann, ya que se basó en ideas de Dirichlet para formular este procedimiento.

Riemann utilizó este principio para hallar funciones cuya imagen fuera de área mínima y que tuviesen ciertos valores en la frontera de una región. Este es el origen del problema de Dirichlet, un problema cuya resolución tiene aplicaciones en ámbitos físicos y matemáticos a su vez.

En el primer capítulo de este trabajo empezaremos hablando sobre las funciones asociadas a este problema: las funciones armónicas. Estas tienen propiedades muy interesantes, lo que las permite aparecer en la solución de problemas clave de electroestática, termodinámica, gravitación, elasticidad y flujo de corrientes eléctricas. En la segunda parte de este primer capítulo, se definirá el núcleo de Poisson y se verán sus aplicaciones en la resolución del problema de Dirichlet en un disco de $\mathbb{C}$.

En el segundo capítulo generalizaremos el problema de Dirichlet a abiertos de $\mathbb{C}_\infty$ utilizando el método de Perron. Para esto se requerirá el estudio de las funciones subarmónicas, funciones que permanecen por debajo de las funciones armónicas ante los mismos valores en la frontera.

En el tercer y último capítulo del trabajo vemos algunos de los apartados de las matemáticas que se relacionan directa o indirectamente con el problema de Dirichlet. En este capítulo trataremos con espacios H^p y h^p y demostraremos algunos resultados de alto interés en las matemáticas.

Preámbulo: Sobre la notación y cuestiones básicas

La mayoría de elementos en este documento tratan sobre subconjuntos de $\mathbb{C}$. Por ello, resulta conveniente recordar algunas nociones básicas que ciertamente serán necesarias para comprender los contenidos tratados en las páginas siguientes.

Sea U un abierto no vacío en $\mathbb{C}$ y $f : U \to \mathbb{C}$ una función. Podemos tomar las partes real e imaginaria de f para crear dos funciones $u, v : U \to \mathbb{R}$ tales que $f = u+iv$, donde i es la unidad imaginaria. Las funciones en $\mathbb{C}$ se pueden tratar en la variable compleja z, o en sus coordenadas equivalentes en $\mathbb{R}^2$, tal que $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, luego esto abre camino a que podamos derivar u y v respecto de x e y. Para abreviar, representaremos la derivada de una función g con respecto de la variable t escribiendo g_t.

Si f admite derivadas, totales o parciales, podremos calcularlas utilizando la descomposición mostrada anteriormente, es decir, $f' = u' + iv'$ o $f_x = u_x + iv_x$.

La función f es holomorfa en U si u, v son al menos de clase $\mathcal{C}^1(U)$ y cumplen las llamadas condiciones de Cauchy-Riemann, que vienen dadas por la expresión

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

Ésta es tan solo una caracterización de holomorfía. Sin embargo, es la caracterización que mejor se trasladará a los contenidos de este documento.

Las funciones holomorfas son el foco del estudio en Análisis Complejo debido a su gran cantidad de propiedades. En efecto, si f es holomorfa, entonces es infinitamente holomorfa, cumple el principio de identidad, admite una expansión en serie de potencias y el valor de su integral entre dos puntos será independiente del camino tomado entre ellos, por citar algunas.

En cuanto a la notación de este documento se refiere, es importante notar que definiremos las bolas como $B(\omega, \rho) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \omega| < \rho\}$ y los discos como $D(\omega, \rho) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \omega| \leq \rho\}$. Anotamos también que a un abierto no vacío simplemente conexo lo denominaremos región, mientras que a un abierto no vacío conexo lo denominaremos dominio. El resto de notación se irá introduciendo a medida que surja la necesidad.

Capítulo 1

Funciones armónicas

El problema de Dirichlet se resuelve utilizando funciones armónicas y por ello constituyen la base teórica de este trabajo. Estas funciones exhiben un comportamiento reminiscente de las funciones holomorfas propias del análisis complejo.

En este capítulo el lector encontrará información sobre estas funciones y sus propiedades. Se habla también del núcleo de Poisson y de sus aplicaciones en la resolución del problema de Dirichlet en un disco.

1.1. Definiciones y propiedades

Las funciones armónicas se definen como las soluciones de la ecuación de Laplace, indicada a continuación.

Definición 1.1.1 (Laplaciano y función armónica)**.** *Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \to \mathbb{C}, f \in \mathcal{C}^2(A)$. Se define el operador laplaciano de la siguiente manera*

$$\Delta := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

La función f se dice armónica en A si se da que $\Delta f = 0$ en A. En concreto, si la imagen de f solamente toma valores en $\mathbb{R}$, entonces se dice que f es una función armónica real.

Hemos definido de forma muy amplia el concepto de función armónica, pero para este trabajo solo necesitaremos su definición en $\mathbb{C}$ con coordenadas complejas $z = x+iy$, x, y reales, identificando los puntos de $\mathbb{C}$ con los puntos de $\mathbb{R}^2$. Entonces, el Laplaciano quedará reducido a

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Observar que una función compleja es armónica si y solamente si su parte real y su parte imaginaria son funciones armónicas reales.

Ejemplo 1.1.2. *Siendo $z = x + iy$, las siguientes funciones son armónicas:*

(1) *Cualquier función afín en términos de x e y en $\mathbb{C}$.*

(2) *Una función holomorfa, su parte real y su parte imaginaria. Por ejemplo, $\Re(e^z) = e^x \cos y$, que lo sería en todo $\mathbb{C}$. Esto se demuestra en el siguiente teorema.*

(3) *$f(z) = \Re(e^{-z^{-4}})$ si $z \neq 0$, $f(0) = 0$. Esta función es armónica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ pero no en $\mathbb{C}$ porque no es continua en $z = 0$. Sin embargo, $\Delta f = 0$ en $\mathbb{C}$*

(4) *La suma, resta y multiplicación por escalares de funciones armónicas en un abierto U son armónicas en U.*

(5) *Las derivadas parciales de una función armónica son funciones armónicas. Esto se demostrará más adelante.*

De la definición surgen algunos resultados inmediatos que muestran la relación fundamental entre funciones armónicas y funciones holomorfas:

Teorema 1.1.3. *Sea f una función holomorfa en un abierto U de $\mathbb{C}$. Entonces, las siguientes propiedades son ciertas:*

(1) *f es armónica en U.*

(2) *$\Re(f)$ y $\Im(f)$ son armónicas reales en U.*

(3) *Si U es simplemente conexo y h es armónica real en U, h es la parte real de alguna función holomorfa en U. Además, dicha función holomorfa es única salvo una constante aditiva imaginaria pura.*

Demostración. (1) Podemos escribir $f = u + iv$, con $u = \Re(f)$, $v = \Im(f)$ funciones reales. El laplaciano de f se puede factorizar de la siguiente manera:

$$\Delta f = (f_x - if_y)(f_x + if_y).$$

Aplicando las condiciones de Cauchy-Riemann en el segundo factor resulta

$$f_x + if_y = u_x - v_y + i(u_y + v_x) = 0.$$

De esto sigue inmediatamente que $\Delta f = 0$. *(2)* Seguido de lo anterior, se tiene que $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$ y $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$. *(3)* Realizaremos una demostración constructiva para demostrar la existencia de f. Sean la función armónica real $h : U \to \mathbb{R}$ y $g : U \to \mathbb{C}$, definida como

$$g = h_x - ih_y.$$

Entonces $g \in \mathcal{C}^1$ y cumple que

$$\Re(g)_x = h_{xx} = -h_{yy} = \Im(g)_y \quad y \quad \Re(g)_y = h_{xy} = h_{yx} = -\Im(g)_x,$$

luego g es holomorfa. Fijando z_0 en U, definimos $f : U \to \mathbb{C}$ como

$$f(z) = h(z_0) + \int_{z_0}^{z} g(\omega) d\omega,$$

donde la integral se hace en un camino en U con punto inicial z_0 y punto final z. Como U es simplemente conexo y g es holomorfa, el camino tomado en U de z_0 a z no cambia el resultado de la integral. Además, f es holomorfa en U y $f' = g = h_x - ih_y$. Si denotamos $\widetilde{h} = \Re(f)$, se tiene que

$$\widetilde{h}_x - i\widetilde{h}_y = f' = g = h_x - ih_y.$$

Por tanto, $(\widetilde{h} - h)_x \equiv 0$ y $(\widetilde{h} - h)_y \equiv 0$. Luego $\widetilde{h} - h$ es constante y evaluando en z_0, se ve que el valor de esta constante es 0. Luego $h = \Re(f)$.

Para la unicidad de f, basta ver que si $f = h + ik$ entonces, por las condiciones de Cauchy-Riemann, $f' = h_x + ik_x = h_x - ih_y$. Sigue que f' queda completamente determinada por h, luego f es única salvo una constante aditiva imaginaria pura. □

La tercera afirmación no tiene por qué darse en abiertos que no sean simplemente conexos. Considerar $h(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ en $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Si existiera una función k tal que $f = h + ik$ fuera holomorfa en U, aplicando las ecuaciones de Cauchy-Riemann sobre la derivada de la función $g(t) = k(\cos t, \sin t)$ se obtiene que

$$\begin{aligned} g'(t) &= (-\sin t)k_x(\cos t, \sin t) + (\cos t)k_y(\cos t, \sin t) \\ &= (\sin t)h_y(\cos t, \sin t) + (\cos t)h_x(\cos t, \sin t) \\ &= \frac{2\sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} + \frac{2\cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = 2, \end{aligned}$$

luego $g(t) = 2t + C$, donde C es una constante real. Pero $g(0) = g(2\pi)$, luego se llega a un absurdo.

Queda entonces ilustrado que cualquier función armónica real es, al menos localmente, la parte real de una función holomorfa. Es interesante notar que esto nos permite definir una correspondencia entre una función holomorfa h y la parte imaginaria de la función armónica f tal que $h = \Re(f)$. A esta parte imaginaria de f se la conoce como la conjugada armónica de h. Explicaremos un poco más sobre las funciones armónicas conjugadas en el Capítulo 3 de este trabajo.

El resultado anterior tiene consecuencias inmediatas.

Corolario 1.1.4. *Sea h armónica real en un subconjunto abierto U de $\mathbb{C}$. Entonces $h \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y sus derivadas son también armónicas reales en U.*

Demostración. Basta ver que una función holomorfa es infinitamente derivable y que h es la parte real de una función holomorfa. Además, existe f holomorfa en U tal que $f = h + ik$ y se tendrá que $h_x = \Re(f')$ y $h_y = \Im(-f')$, que son funciones armónicas reales. $\square$

Corolario 1.1.5. *Sean U_1, U_2 abiertos de $\mathbb{C}$, $f : U_1 \to U_2$ holomorfa y h armónica real en U_2. Entonces $h \circ f$ es armónica real en U_1.*

Demostración. Como h es armónica real, entonces existe g holomorfa en U_2 tal que $h = \Re(g)$. Entonces $g \circ f$ es holomorfa en U_1 y $\Re(g \circ f) = h \circ f$ es armónica real en U_1. $\square$

Este último corolario es de utilidad a la hora de extender la noción de armonicidad a $\mathbb{C}_\infty$. Para ello utilizaremos transformaciones conformes sobre la esfera. Ya que su uso será crucial en capítulos posteriores, se les ha dedicado el Apéndice A de este documento, donde el lector podrá encontrar su definición y algunas de sus propiedades.

Definición 1.1.6 (Función armónica en ∞)**.** *Sea h una función definida en un entorno abierto U de ∞. Decimos que h es armónica en U si $h \circ \phi^{-1}$ lo es en $\phi(U)$, donde ϕ es una transformación conforme de U en un abierto de $\mathbb{C}$.*

Es sencillo utilizar el Corolario 1.1.5 para demostrar que no es importante la elección de ϕ en la definición anterior.

Las funciones armónicas albergan un alijo de propiedades matemáticas muy interesantes. Una de las más destacables es el denominado principio del máximo.

Teorema 1.1.7 (Principio del máximo)**.** *Sea h una función armónica real en un dominio U de $\mathbb{C}$. Entonces:*

(1) Si h posee un máximo local en U, entonces h es constante en U.

(2) Si h admite una extensión continua[1] *a $\overline{U}$, la clausura de U en $\mathbb{C}_\infty$, y $h \leq 0$ en la frontera, entonces $h \leq 0$ en U.*

Para demostrar este teorema necesitaremos antes enunciar y demostrar otras dos propiedades de las funciones armónicas.

[1] Es una función real continua en la topología dada por la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{C}$

Teorema 1.1.8 (Propiedad de la media global)**.** *Sea h una función armónica en un entorno abierto del disco $D(z,r)$. Entonces, se tiene que*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(z+re^{i\theta})d\theta.$$

Demostración. Elegimos $\rho > r$ tal que h sea armónica en la bola $B \equiv B(z,\rho)$. Por el Teorema 1.1.3(3), sabemos que existe f holomorfa tal que $h = Ref$ en B. Por la fórmula integral de Cauchy, se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta - z|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Integrando en el camino $\Gamma(\theta) = z + re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, y tomando partes reales a ambos lados de la igualdad obtenemos el resultado. □

Cabe destacar que el radio máximo de las circunferencias no depende del punto central tomado, siempre y cuando la función sea armónica en ese disco. Si ese fuera el caso, la propiedad sería local, en vez de global. La importancia de este apunte surgirá en el Capítulo 2.

Teorema 1.1.9 (Principio de identidad en funciones armónicas)**.** *Sean h y k funciones armónicas reales en un dominio U de $\mathbb{C}$. Si $h = k$ en un subconjunto abierto no vacío S de U, entonces $h = k$ en U.*

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $k = 0$ en U. Construimos $g = h_x - ih_y$. Se tiene que g es holomorfa en U y, por hipótesis, es 0 en S. Por el principio de identidad en funciones holomorfas, g es 0 en U, luego $h_x = 0$ y $h_y = 0$ en U. Esto significa que h es constante en U, y ya que vale 0 en S, el valor de esa constante es 0. □

Observar que la función armónica $u(x,y) = x$ es cero en $x = 0$. Esto significa que no podemos dar un principio similar al principio de prolongación analítica en funciones holomorfas.

Demostración del principio del máximo. (1) Supongamos que z es un máximo local de h en U. Entonces existe un entorno abierto S de z tal que $\forall\zeta \in S$ se tiene que $h(z) \geq h(\zeta)$. Por la propiedad de la media aplicada en un disco cerrado $D \equiv D(z,r), r > 0$, contenido en S, vemos que ningún $h(\zeta)$ en D puede estar por debajo de $h(z)$. Luego $h(z) = h(\zeta), \forall\zeta \in D$, es decir, h es constante en D. Ahora bien, por el principio de identidad de funciones armónicas aplicado sobre un abierto contenido en D se da que el valor constante de h se extiende a todo U.

(2) Como $\overline{U}$ es compacto en $\mathbb{C}_\infty$, h tendrá que alcanzar un máximo absoluto en algún punto $z \in \overline{U}$. Si $z \in \partial U$, entonces $h(z) \leq 0$ por hipótesis y, por ser máximo absoluto, $h \leq 0$ en U. Si $z \in U$, entonces, por (1), h es constante en U y, por extensión, también en $\overline{U}$. Por hipótesis, se tiene que $h \leq 0$ en U. □

Existen algunos corolarios que radican en este principio:

Corolario 1.1.10. *Sea h una función armónica real en un dominio U de $\mathbb{C}$ y continua en $\overline{U}$. Entonces h alcanza su máximo y su mínimo absolutos en ∂U.*

Demostración. $\overline{U}$ es compacto en $\mathbb{C}_\infty$, luego h alcanza máximo y mínimo ahí. Ahora bien, si h alcanza su máximo en U, por el principio del máximo h es constante. Lo mismo se da si h alcanza su mínimo en U: $-h$ sería constante. Si h no alcanza máximo y mínimo en U, el teorema de Weierstrass dice que debe alcanzarlos en ∂U. En cualquier caso, la función alcanza máximo y mínimo en la frontera. □

Corolario 1.1.11. *Sean h_1 y h_2 funciones armónicas reales en un dominio U y continuas en $\overline{U}$. Si $h_1 = h_2$ en ∂U, entonces $h_1 = h_2$ en U.*

Demostración. $h_1 - h_2$ es armónica real y es exactamente 0 en ∂U. Entonces, basta aplicar el principio del máximo a $\pm(h_1 - h_2)$. □

1.2. El núcleo de Poisson

Además de sus otras aplicaciones en Análisis Armónico, el núcleo de Poisson será la clave para solucionar el problema de Dirichlet en un disco de $\mathbb{C}$. Debemos empezar mostrando de dónde proviene. Para tal fin, utilizaremos las herramientas de la sección anterior con tal de hallar una expresión en serie de potencias para una función armónica. Bastará hallar dicha expresión en la bola $B(0,1)$, ya que por transformaciones lineales podemos amoldarnos a una bola B cualquiera.

Teorema 1.2.1. *Sea h una función armónica en $B(0,R), R > 1$. Entonces h admite la siguiente expresión en forma de serie de Fourier:*

$$h(re^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \, r^{|k|} \, e^{ik\theta}, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi$$

con a_k siendo

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{it}) e^{-ikt} dt.$$

Demostración. Por ser h armónica, existe f holomorfa en $B := B(0,R)$ tal que $h = \Re(f)$ en el disco, o lo que es lo mismo, $h = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$. Por ser f holomorfa, admite una expresión en serie de potencias: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, que converge absolutamente en B y uniformemente en los compactos de B. Antes de sustituir en la expresión de h, es conveniente realizar un cambio de variable a polares, $z = re^{i\theta}$. Sustituimos en h

$$
\begin{aligned}
h(re^{i\theta}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, r^k\, e^{ik\theta} + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{c}_k\, r^k\, e^{-ik\theta}\right) \\
= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{2}\, r^k\, e^{ik\theta} + \sum_{-\infty}^{0} \frac{\overline{c}_{-k}}{2}\, r^{-k}\, e^{ik\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k\, r^{|k|}\, e^{ik\theta}.
\end{aligned}
$$

Con coeficientes $a_k = \frac{c_k}{2}, k > 0, a_0 = \Re(c_0), a_k = \frac{\overline{c}_{-k}}{2}, k < 0$. Obtenemos pues la expresión en serie de potencias de h esperada. Esta serie converge uniformemente en $r = 1$ y, en ese caso, vemos que a_k son los coeficientes de Fourier de la función $h(e^{it})$

$$
a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{it})\, e^{-ikt} dt. \qquad \square
$$

La expresión del **núcleo de Poisson** surge naturalmente de la serie de potencias dada anteriormente. En efecto, si sustituimos el valor de a_k en la serie, obtenemos, con la notación del teorema anterior,

$$
h(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{it}) \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta - t)} dt.
$$

La serie converge uniformemente para $0 \le r \le 1$ y el valor de su suma es:

$$
\begin{aligned}
\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta-t)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ik(\theta-t)} + \overline{\sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ik(\theta-t)}} \\
= 1 + \frac{re^{i(\theta-t)}}{1 - re^{i(\theta-t)}} + \frac{re^{-i(\theta-t)}}{1 - re^{-i(\theta-t)}} = 1 + \frac{2r\cos(\theta - t) - 2r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)} \\
= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)}.
\end{aligned}
$$

Este es el núcleo de Poisson para el disco unidad. A continuación, se presenta la notación que utilizaremos y la llamada integral de Poisson.

Definición 1.2.2 (Núcleo e integral de Poisson). *Se define el núcleo de Poisson* $P : [0, 1) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ *con la siguiente expresión*

$$P(r, t) := \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos t}, \; 0 \leq r < 1, \; 0 \leq t < 2\pi.$$

Sean ahora $B = B(\omega, \rho)$ *una bola y* $\phi : \partial B \to \mathbb{R}$ *una función integrable en sentido Lebesgue. La integral de Poisson de* ϕ*,* $P_B\phi : B \to \mathbb{R}$*, se define por la expresión*

$$P_B\phi(\omega + re^{it}) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\frac{r}{\rho}, \theta - t)\phi(\omega + \rho e^{i\theta})d\theta, \; 0 \leq r < \rho.$$

Cabe notar que el núcleo de Poisson es una función periódica de periodo 2π y par sobre la segunda variable.

De la definición brotan directamente algunas propiedades que resultarán fundamentales para hallar la solución del problema de Dirichlet en el disco.

Teorema 1.2.3. *Sea* $\phi : \partial B \to \mathbb{R}$ *una función integrable en sentido Lebesgue. La integral de Poisson* $P_B\phi$ *es una función armónica real en la bola* $B \equiv B(\omega, \rho)$*.*

Demostración. Sea $f(t) = \phi(\omega + \rho e^{it})$. Entonces f es 2π-periódica y su serie de Fourier será

$$f(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}, \quad a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}d\theta.$$

Por tanto, se tendrá que, si $0 \leq r < \rho$,

$$P_B\phi(\omega + re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\frac{r}{\rho}, t - \theta)f(\theta)d\theta =$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{|k|} e^{ik(t-\theta)} f(\theta)d\theta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left(\frac{r}{\rho}\right)^{|k|} e^{ikt}.$$

Y vemos que, como f toma valores reales, los a_k son reales y

$$P_B\phi(\omega + re^{it}) = a_0 + \overline{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{r}{\rho}\right)^{|k|} e^{ikt}} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{r}{\rho}\right)^{|k|} e^{ikt} =$$
$$= \Re\left(a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{re^{it}}{\rho}\right)^k\right).$$

Luego, siendo $z = \omega + re^{it}$,

$$P_B\phi(z) = \Re\left(a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{z-\omega}{\rho}\right)^k\right),$$

que es la parte real de una función holomorfa en B. Por tanto, $P_B\phi$ es armónica real en B. $\square$

Teorema 1.2.4. *El núcleo de Poisson $P(r,t)$ satisface las siguientes propiedades:*

(1) $P(r,t) > 0$, $\forall (r,t) \in [0,1) \times [0, 2\pi)$.

(2) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta)d\theta = 1$, $0 \leq r < 1$.

(3) $\sup_{\delta \leq |\theta - t| \leq 2\pi - \delta} P(r, \theta - t) \to 0$ *cuando* $r \to 1$, *para todo* $\delta > 0$ *y* $0 \leq t < 2\pi$.

(4) $P(r, \theta - t) = \Re\left(\dfrac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}}\right)$.

Demostración. (1) El resultado es trivial dada la definición de $P(r,t)$.
(2) Por el Teorema 1.2.1 y por ser cualquier constante una función armónica, podemos desarrollar 1 en serie de potencias

$$\begin{aligned}1 &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\, r^{|k|}\, e^{ik\theta} dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|k|}\, e^{ik(\theta - t)} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) d\theta.\end{aligned}$$

(3) Se tiene que

$$P(r, \theta - t) \leq \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\delta} \leq \frac{1 - r^2}{1 - \cos^2\delta} \to 0,\ r \to 1.$$

La última desigualdad se da por ser $r = \cos\delta$ donde el denominador alcanza su mínimo como función de r.
(4) Operamos:

$$\begin{aligned}\Re\left(\frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} + \frac{e^{-it} + re^{-i\theta}}{e^{-it} - re^{-i\theta}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(1 - r^2) + (1 - r^2)}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}\right) = P(r,t)\end{aligned}$$

$\square$

Con las herramientas desarrolladas en esta sección, estamos preparados para abordar el problema de Dirichlet en el disco.

1.3. El problema de Dirichlet en el círculo

Antes de estudiar el problema de Dirichlet en dominios arbitrarios de $\mathbb{C}$, consideraremos un caso particular del problema de Dirichlet: el caso en una bola de $\mathbb{C}$. Este es un caso importante porque en resultados posteriores veremos que la solución del problema en el círculo se podrá extrapolar a otras regiones de $\mathbb{C}$.

Sin más dilación, definamos el problema de Dirichlet.

Definición 1.3.1 (Problema de Dirichlet)**.** *Sea U un dominio de $\mathbb{C}$ con ∂U su frontera en $\mathbb{C}_\infty$y sea $\phi : \partial U \to \mathbb{R}$ una función continua. El problema de Dirichlet consiste en encontrar una función $h : U \to \mathbb{R}$ armónica real tal que $\forall \zeta \in \partial U$ se tenga que $\lim_{z \to \zeta} h(z) = \phi(\zeta)$.*

Podemos extraer un resultado general sobre la unicidad de la solución utilizando algunas propiedades de las funciones armónicas:

Teorema 1.3.2. *El problema de Dirichlet admite a lo sumo una solución.*

Demostración. Sean h_1 y h_2 soluciones del problema de Dirichlet. Como sus valores en la frontera son idénticos, por el Corolario 1.1.11 se tiene que $h_1 = h_2$ en el interior del dominio. $\square$

Dediquémonos ahora al caso planteado en el título de la sección. Tal y como se ha dicho en la sección anterior, el núcleo de Poisson resulta ser la clave para resolver el problema de Dirichlet en el disco. En efecto, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.3.3. *Si $\phi : \partial B(\omega, \rho) \to \mathbb{R}$ es una función integrable y continua en el punto $\zeta_0 \in \partial B(\omega, \rho)$, entonces $\lim_{z \to \zeta_0} P_B\phi(z) = \phi(\zeta_0)$.*

Demostración. Sea $B = B(\omega, \rho)$ y denotamos $z = \omega + re^{it}, 0 \leq r < \rho$ y $\zeta_0 = \omega + \rho e^{is}$ con $0 \leq s, t < 2\pi$, tenemos

$$\begin{aligned} |P_B\phi(z) - \phi(\zeta_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P\left(\frac{r}{\rho}, \theta - t\right) (\phi(\omega + \rho e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P\left(\frac{r}{\rho}, \theta - t\right) |\phi(\omega + \rho e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)| d\theta. \quad (1) \end{aligned}$$

En el cálculo anterior, la igualdad se da por la propiedad 1.2.4(2) y la desigualdad se arregla por la propiedad 1.2.4(1). Sea $\epsilon > 0$. Siendo ϕ continua en ζ_0 y sea $\zeta = \omega + \rho e^{it}$, se tiene que existe $\pi > \delta > 0$ tal que

$$|s - t| < \delta \; o \; |s - t| > 2\pi - \delta \Rightarrow \; |\zeta - \zeta_0| < \delta' \equiv \delta'(\delta) \Rightarrow |\phi(\zeta) - \phi(\zeta_0)| < \epsilon.$$

Por tanto, bajo estas hipótesis se tiene que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{s-\delta}^{s+\delta} P\left(\frac{r}{\rho},\theta-t\right)|\phi(\omega+\rho e^{i\theta})-\phi(\zeta_0)|d\theta$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} P\left(\frac{r}{\rho},\theta-t\right)\epsilon d\theta=\epsilon. \quad (2)$$

En el cálculo anterior, la desigualdad se da por la propiedad 1.2.4(1), ya que ampliar el dominio de integración hará crecer a la integral, y la igualdad por la propiedad 1.2.4(2). Si bien es cierto que $s-\delta$ puede ser negativo, podemos aprovechar la 2π-periodicidad del núcleo de Poisson para establecer el dominio de integración de la primera integral de forma que quede contenido en $[0,2\pi)$.

Por la propiedad 1.2.4(3), se tiene

$$\sup_{\delta\le|s-t|\le 2\pi-\delta} P\left(\frac{r}{\rho},s-t\right)<\epsilon,\ 0<\rho-r<\delta''.$$

Entonces, para tales valores de r

$$\frac{1}{2\pi}\int_{s+\delta}^{2\pi+s-\delta} P\left(\frac{r}{\rho},\theta-t\right)|\phi(\omega+\rho e^{i\theta})-\phi(\zeta_0)|d\theta$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\epsilon|\phi(\omega+\rho e^{i\theta})-\phi(\zeta_0)|d\theta$$
$$\le \epsilon\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\phi(\omega+\rho e^{i\theta})|d\theta+|\phi(\zeta_0)|\right). \quad (3)$$

La primera desigualdad se da por la propiedad 1.2.4(3) y la segunda por la desigualdad triangular. En conclusión, si sumamos las desigualdades (2) y (3) obtenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} P\left(\frac{r}{\rho},\theta-t\right)|\phi(\omega+\rho e^{i\theta})-\phi(\zeta_0)|d\theta$$
$$\le \epsilon\left(1+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\phi(\omega+\rho e^{i\theta})|d\theta+|\phi(\zeta_0)|\right).$$

y a su vez, al combinarse con (1), obtenemos el resultado final. Para los valores de r trabajados, se cumple

$$|P_B\phi(z)-\phi(\zeta_0)|\le \epsilon\left(1+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\phi(\omega+\rho e^{i\theta})|d\theta+|\phi(\zeta_0)|\right).$$

Que es equivalente al enunciado del teorema. □

Teorema 1.3.4. *La solución al problema de Dirichlet en la bola $B = B(\omega, \rho)$ con función de contorno ϕ continua es $P_B\phi$.*

Demostración. En efecto, $P_B\phi$ es armónica real en B y por el Teorema 1.3.3, como ϕ es continua en todos sus puntos, se tiene que $\forall \zeta \in \partial U, \lim_{z\to\zeta} P_B\phi(z) = \phi(\zeta)$. $\square$

Además de para resolver el problema de Dirichlet en el disco, podemos encontrar una aplicación muy útil para el Teorema 1.3.3. Se trata de una caracterización muy importante de las funciones armónicas reales, una que cerrará este capítulo y nos resultará de gran utilidad en el siguiente.

Teorema 1.3.5. *Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $h : U \to \mathbb{C}$ una función continua en U. Entonces se tiene que h es armónica en U si y solamente si h cumple la propiedad de la media local, esto es, dado un $\omega \in U$, existe ρ tal que $B(\omega, \rho) \subset U$ y*

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\omega + re^{i\theta})d\theta, \text{ con } 0 \leq r < \rho.$$

Demostración. Ya se ha demostrado en el Teorema 1.1.8 que las funciones armónicas en abiertos de $\mathbb{C}$ cumplen la propiedad de la media global, que implica directamente que cumplen la propiedad de la media local.

Demostraremos la afirmación siguiente para el caso en que h toma valores solamente en $\mathbb{R}$. Para demostrarlo para cualquier h basta tomar partes real e imaginaria de h.

Empezamos suponiendo que h cumple la propiedad de la media local. Para probar que h es armónica real en U, probaremos que lo es en cada bola B tal que $\overline{B} \subset U$. Fijamos tal B y definimos $u : \overline{B} \to \mathbb{R}$

$$u = \begin{cases} h - P_B h, & en\ B, \\ 0, & en\ \partial B. \end{cases}$$

Entonces, por el teorema anterior, u es continua en $\overline{B}$ y cumple la propiedad de la media local en B, por tenerla h y P_Bh. Como $\overline{B}$ es compacto, u alcanza un máximo M en algún punto de $\overline{B}$. Sean entonces $X = \{z \in B : u(z) < M\}$ e $Y = \{z \in B \,|\, u(z) = M\}$. X será abierto por ser u continua. Y será abierto también, porque la propiedad de la media local permite encontrar un entorno abierto S para cada punto z tal que $u(\omega) = M, \forall \omega \in S$. Vemos entonces que $B = X \cup Y$, con X, Y abiertos y B conexo. Eso implica que o bien $B = X$ o bien $B = Y$. En el caso $B = X$, u debe alcanzar su máximo en ∂B, luego $M = 0$. En el caso $B = Y$ se da que $u \equiv M$ en B, y por ser u continua en $\overline{B}$, $M = 0$. Por tanto, $u \leq 0$. Por demostración análoga, $u \geq 0$. Por tanto, $u = 0$ en B, luego $P_Bh = h$, lo que demuestra que h es armónica por ser P_Bh armónica. $\square$

Capítulo 2

Análisis del problema de Dirichlet

En este capítulo desarrollaremos teoría sobre funciones subarmónicas con la cual trataremos de hallar cuándo el problema de Dirichlet tiene solución y, en caso de existir esta solución, daremos unas ideas iniciales de cómo se puede hallar.

Sin embargo, el cálculo de esta solución será prácticamente imposible con las técnicas desarrolladas aquí. En el Capítulo 3 daremos una fórmula integral que dará la solución del problema, pero solamente en casos particulares. Para más información en cómo dar la expresión de la solución al problema de Dirichlet, véase el libro de Ransford [1], Capítulo 4.

2.1. Funciones subarmónicas

La resolución final del problema de Dirichlet en $\mathbb{C}$ dependerá de las funciones subarmónicas. Si tuviéramos que definirlas siguiendo el mismo esquema utilizado para las funciones armónicas, diríamos que una función $u : A \to \mathbb{C}$, con A abierto de $\mathbb{R}$, es subarmónica si es continua y $\Delta u \geq 0$ en A. Sin embargo, esto limita la propiedad de subarmonicidad a las funciones $\mathcal{C}^2$, lo que limita su flexibilidad, una cualidad que, como veremos a continuación, nos servirá bien.

Se ha dejado entrever que nuestra definición de función subarmónica no incluirá ser $\mathcal{C}^2$. No solo eso, si no que permitiremos que las funciones subarmónicas puedan no ser continuas. A continuación, introducimos la condición mínima que impondremos a las funciones subarmónicas.

Definición 2.1.1 (Semicontinuidad)**.** *Sea X un espacio topológico. Decimos que una función $u : X \to [-\infty, \infty)$ es superiormente semicontinua si el conjunto $\{x \in X : u(x) < \alpha\}$ es abierto para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. Además, $v : X \to (-\infty, \infty]$ es inferiormente semicontinua si $-v$ es superiormente semicontinua.*

Por supuesto, u es continua si y solamente si u es superior e inferiormente semicontinua.

Si u es superiormente semicontinua, para cada $x_0 \in X$ y para todo $\epsilon > 0$, el conjunto $\{x \in X : u(x) < u(x_0) + \epsilon\}$ es un conjunto abierto que contiene a x_0, luego

$$\limsup_{x \to x_0} u(x) \leq u(x_0).$$

La implicación contraria también es válida: si $\limsup_{x\to x_0} u(x) \leq u(x_0)$ para un $x_0 \in X$, entonces u es superiormente semicontinua. Esto se demuestra viendo que $\{x \in X : u(x) < u(x_0) + \epsilon\}$ son entornos abiertos de x_0.

Podemos destacar una propiedad que será útil cuando trabajemos con funciones subarmónicas.

Teorema 2.1.2. *Sean u una función superiormente semicontinua en un espacio topológico X y K un compacto de X. Entonces u está acotada en K y alcanza su máximo ahí.*

Demostración. La familia $\mathcal{U} := \{x \in X \mid u(x) < n, n \geq 1\}$ es un cubrimiento abierto de K. Por la definición de compacto, podemos extraer de $\mathcal{U}$ un subcubrimiento finito de K, por lo que concluimos que u está acotada en K.

Sean $M = \sup_{x\in K} u(x)$ y la familia de abiertos $\mathcal{V} := \{x \in X \mid u(x) < M - \frac{1}{n}, n \geq 1\}$. Como no podemos encontrar una subfamilia finita de $\mathcal{V}$ que cubra a K, tenemos que $\mathcal{V}$ no es un cubrimiento de K. Por tanto, existe al menos un punto $x \in K$ tal que $u(x) = M$. □

Con esto en mano, podemos definir cuándo una función será subarmónica.

Definición 2.1.3 (Función subarmónica, propiedad de la submedia local)**.** *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y $u : U \to [-\infty, \infty)$. Decimos que u es subarmónica si es superiormente semicontinua y satisface la propiedad de la submedia local, es decir, dado un $z \in U$ existe $\rho > 0$ tal que*

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{it})dt, \quad 0 \leq r < \rho.$$

Además, $v : U \to (-\infty, \infty]$ es superarmónica si $-v$ es subarmónica.

Observar la analogía entre la definición anterior y la propiedad dada por el Teorema 1.3.5 sobre funciones armónicas. A partir de esta definición vemos clara una relación entre funciones armónicas y subarmónicas, sobre la que hablaremos más adelante.

Debemos dejar claro cuanto antes que la integral anterior está bien definida. Por supuesto, se debe interpretar como la diferencia de las correspondientes integrales de u^+ y u^-. Por el Teorema 2.1.2, u está acotada superiormente en cada disco, luego u^+ también, por tanto, su integral de Lebesgue estará definida. No podemos decir lo mismo de u^-, ya que esta parte puede valer $-\infty$ en algunos puntos. Sin embargo, este hecho se dará solamente cuando la función sea idénticamente $-\infty$. Tal hecho se demostrará más adelante.

Como último detalle, notar que por la definición que hemos dado, las funciones subarmónicas solamente toman valores en $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Anotemos algunos ejemplos básicos de funciones subarmónicas.

Ejemplo 2.1.4. *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$. Entonces, se tiene que*

(1) Cualquier función armónica real en U es subarmónica en U.

(2) Si u, v son subarmónicas en U, $\max(u, v)$ y $\alpha u + \beta v$ con $\alpha, \beta \geq 0$ son subarmónicas en U.

(3) Si f es una función holomorfa en U, $\log|f|$ es subarmónica en U. Se ve rápidamente que $u := \log|f|$ es superiormente semicontinua y que para cada punto ω tal que $u(\omega) > -\infty$ la función es armónica localmente, luego subarmónica. Si $u(\omega) = -\infty$, claramente se cumple la propiedad de la submedia local.

Podemos empezar a extraer resultados de la definición. Las funciones subarmónicas tienen propiedades que serán de gran utilidad en la resolución del problema de Dirichlet ya que tienen cierta relación con las propiedades de las funciones armónicas y son más flexibles que éstas.

Uno de los resultados más potentes de estas funciones es su propia versión del principio del máximo.

Teorema 2.1.5 (Principio del máximo en funciones subarmónicas)**.** *Sea u una función subarmónica en un dominio U de $\mathbb{C}$. Entonces,*

(a) Si u alcanza un máximo global en U, entonces u es constante.

(b) Si $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq 0, \forall \zeta \in \partial U$, entonces $u \leq 0$ en U.

Demostración. (a) Supongamos que u alcanza un máximo absoluto en U, M. Sean

$$A := \{z \in U : u(z) < M\} \quad y \quad B := \{z \in U : u(z) = M\}.$$

Entonces A es abierto por ser u superiormente semicontinua. Además, si $u(\omega) = M$ para algún ω en U, por la propiedad de la submedia local fuerza $u = M$ en todas las bolas de radio suficientemente pequeño de centro ω, luego hemos hallado entornos abiertos contenidos en B para cualquier punto de B, luego B es abierto. Como $U = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$, o bien $U = A$ o bien $U = B$. Como $B \neq \emptyset$ por hipótesis, concluimos que $B = U$.

(b) Extendemos u a $\overline{U}$ definiendo $u(\zeta) = \limsup_{z\to\zeta} u(z)$ para los ζ en ∂U. Entonces u es superiormente semicontinua en $\overline{U}$, que es compacto en $\mathbb{C}_\infty$, luego u alcanza un máximo en algún punto $\omega \in \overline{U}$. Si $\omega \in \partial U$, entonces por hipótesis $u(\omega) \leq 0$, luego $u \leq 0$ en U. Si $\omega \in U$, por la primera parte se tiene que u es constante en U, luego en $\overline{U}$ también será constante. □

Para continuar, probaremos que las funciones subarmónicas no solamente satisfacen la propiedad de la submedia local, sino también la versión global, es decir, el radio del disco sobre el que se toma la media no dependerá del punto medio escogido, siempre que la función sea subarmónica en el disco resultante.

Antes de hacer eso, necesitaremos el resultado que ilustra la relación mencionada entre funciones armónicas y funciones subarmónicas.

Teorema 2.1.6 (Caracterizaciones de subarmonicidad)**.** *Sean U un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y $u : U \to [-\infty, \infty)$ una función superiormente semicontinua. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) *u es subarmónica en U.*

(b) *Si $D(\omega, \rho) \subset U$, entonces para $0 \leq r < \rho$ y $0 \leq t < 2\pi$ se tiene que*

$$u(\omega + re^{it}) \leq P_B u(\omega + re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\theta - t)} u(\omega + \rho e^{i\theta})d\theta,$$

donde $B = B(\omega, \rho)$.

(c) *Sean $A \subset U$ acotado y h una función armónica en A que cumpla*

$$\limsup_{z\to\zeta}(u - h)(z) \leq 0, \quad \text{con } \zeta \in \partial A.$$

Entonces $u \leq h$ en A.

Necesitamos un resultado adicional sobre funciones superiormente semicontinuas para poder llevar a cabo esta demostración.

Teorema 2.1.7. *Sea u una función superiormente semicontinua en un espacio métrico (X, d) y acotada superiormente en X. Entonces existe una sucesión de funciones continuas $\phi_n : X \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ tales que $\phi_1 \geq \phi_2 \geq \cdots \geq u$ en X y $\lim_{n\to\infty} \phi_n = u$.*

Demostración. Si $u \equiv -\infty$, tomamos $\phi_n = -n$. En otro caso, definimos $\phi_n : X \to \mathbb{R}$ con la expresión

$$\phi_n(x) = \sup_{y\in X}(u(y) - nd(x, y)), \quad \text{para } x \in X.$$

Demostraremos primero que ϕ_n es continua para todo n. Después demostraremos la igualdad $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = u(x)$ demostrando las desigualdades a izquierda y derecha. Para la continuidad de las ϕ_n, sean $x, x', y \in X$ y, aplicando la desigualdad triangular, se da

$$\begin{aligned} &n(d(x', y) - d(x, y)) \leq nd(x, x') \\ &\qquad\qquad\qquad \Rightarrow u(y) - nd(x', y) \leq u(y) - nd(x, y) + nd(x, x'). \end{aligned}$$

Aplicando supremo al lado derecho y después al izquierdo, obtenemos

$$\begin{aligned} &u(y) - nd(x', y) \leq \phi_n(x) + nd(x, x') \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \phi_n(x') \leq \phi_n(x) + nd(x, x') \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \phi_n(x') - \phi_n(x) \leq nd(x, x'). \end{aligned}$$

Se puede repetir el argumento cambiando el orden de x y x', luego

$$\phi_n(x) - \phi_n(x') \leq nd(x, x') \Rightarrow |\phi_n(x) - \phi_n(x')| \leq nd(x, x').$$

Por tanto, ϕ_n es continua para todo n. Además, para cualquier $x \in X$ se tiene que $\phi_1(x) \geq \phi_2(x) \geq \cdots \geq u$ y $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) \geq u(x)$.

Para el otro sentido de la desigualdad, sea $B = B(x, \rho)$, $\rho > 0$. Entonces tenemos, por la definición de ϕ_n, que $\phi_n(x) \leq \sup_B u$ cuando se toma tal que $d(x, y) < \rho$ y que $\phi_n(x) \leq \sup_X u - n\rho$ cuando se toma tal que $d(x, y) \geq \rho$. Por tanto,

$$\phi_n(x) \leq \max \left(\sup_B u, \sup_X u - n\rho \right), \quad x \in X$$

y tomando límite en ambas partes sobre n, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) \leq \sup_B u, x \in X$. Haciendo que $\rho \to 0$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n \leq \lim_{\rho\to 0} \left(\sup_{y\in B} u(y) \right) = \limsup_{y\to x} u(y) \leq u(x)$$

por ser u superiormente semicontinua y concluimos que $\lim_{n\to\infty} \phi_n = u$. $\square$

Demostración del Teorema 2.1.6. (a)⇒(c) Sean A un conjunto y h una función que cumplan la afirmación de *(c)*. Entonces $u - h$ es subarmónica en A. Por la propiedad otorgada a h podemos aplicar el principio del máximo, concluyendo que $u - h \leq 0$ en A.

(c)⇒(b) Sea $B = B(\omega, \rho)$ tal que $\overline{B} \subset U$. Por el Teorema 2.1.7, existe una familia de funciones continuas $\phi_n : \partial D \to \mathbb{R}$ que decrecen a u en ∂B.

Por el Teorema 1.2.3, $P_B\phi_n$ es armónica real en B y además, por el Teorema 1.3.4, $\lim_{z\to\zeta} P_B(z)\phi_n = \phi_n(\zeta)$ para todo $\zeta \in \partial B$, luego

$$\limsup_{z\to\zeta}(u - P_B\phi_n)(z) \leq u(\zeta) - \phi_n(\zeta) \leq 0$$

por la semicontinuidad superior de u. Según *(c)*,

$$u(z) \leq P_B\phi_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\theta - t)}\phi_n(\omega + \rho e^{i\theta})d\theta.$$

Tomando el límite sobre n y como la sucesión $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decrece, converge puntualmente a u y sus elementos son continuos y por tanto integrables, podemos utilizar el Teorema de Convergencia Monótona y alcanzar así el resultado.

(b)⇒(a) Tomando $r = 0$ en la desigualdad de *(b)*, tenemos inmediatamente la propiedad de la submedia global, que implica directamente su versión local. □

De este teorema surge el nombre otorgado a las funciones subarmónicas, ya que la afirmación *(c)* nos asegura que cualquier función armónica real h quedará por encima de cualquier función subarmónica u dado que los valores en la frontera de h sean iguales o mayores a los de u. Este hecho será de suma importancia a la hora de resolver el problema de Dirichlet en dominios arbitrarios de $\mathbb{C}$ y dominios propios de $\mathbb{C}_\infty$.

Además, ahora podemos deducir fácilmente que todas las funciones subarmónicas cumplen la propiedad de la submedia global.

Corolario 2.1.8. *Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, u una función subarmónica en U y $D = D(\omega, \rho) \subset U$. Entonces se tiene que*

$$u(\omega) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\omega + \rho e^{it})dt.$$

Demostración. El resultado es equivalente a la propiedad *(b)* del teorema anterior con $r = 0$. □

Del teorema de caracterización también podemos deducir que la subarmonicidad, al igual que la armonicidad, se preserva por transformaciones conformes.

Corolario 2.1.9. *Sean U_1, U_2 abiertos de $\mathbb{C}$, $f : U_1 \to U_2$ una transformación conforme y u una función subarmónica en U_2. Entonces, $u \circ f$ es subarmónica en U_1.*

Demostración. Sean $D \subset U_1$ un dominio y h una función armónica real en D tal que
$$\limsup_{z\to\zeta}(u\circ f - h)(z) \leq 0, \quad \forall\zeta \in \partial D.$$
Por ser f conforme, es holomorfa, luego $f(D)$ es un dominio en U_2, y además f^{-1} es también conforme, luego $h \circ f^{-1}$ es armónica real en $f(D)$ y
$$\limsup_{z\to f(\zeta)}(u - h\circ f^{-1})(z) \leq 0, \quad \forall\zeta \in \partial D.$$
Por la propiedad *(c)* del teorema de caracterización, se tiene que $u \leq h\circ f^{-1}$ en $f(D)$, luego $u \circ f \leq h$ en D. Concluimos que $u \circ f$ es subarmónica en U_1. □

Este corolario y su equivalente en funciones armónicas reales parecen indicar que el problema de Dirichlet será invariable ante transformaciones conformes. Esto podría significar que el comportamiento del problema de Dirichlet en un dominio propio U de $\mathbb{C}_\infty$ es equivalente al de cualquier otro dominio propio U_α de $\mathbb{C}_\infty$ siempre que exista $f_\alpha : U \to U_\alpha$. Además, si h es solución al problema en U, $h_\alpha = h \circ f_\alpha$ sería solución al problema en U_α. No obstante, sería necesario demostrar el llamado teorema de Carathéodory sobre transformaciones conformes para ver bajo qué condiciones f admite una extensión continua a la frontera de la región U. Esta forma de estudio del problema de Dirichlet queda pues, apartada.

Sin embargo, con la ayuda de las transformaciones de Möbius, que son continuas en todo $\mathbb{C}_\infty$, sí que podremos trasladar el problema de Dirichlet de $\mathbb{C}_\infty$ a $\mathbb{C}$. Esto será de utilidad cuando pasemos a resolver el problema en un dominio propio de $\mathbb{C}_\infty$ y en general en varias demostraciones en el resto del trabajo.

Por este hecho podemos ver que la subarmonicidad se extiende de forma natural a $\mathbb{C}_\infty$.

Definición 2.1.10 (Subarmonicidad en ∞)**.** *Sea u una función real definida en un entorno abierto U de ∞. Decimos que u es subarmónica en U si $u\circ\phi^{-1}$ lo es en $\phi(U)$, donde ϕ es una transformación conforme de U en un abierto de $\mathbb{C}$.*

Con estas herramientas en mano, podemos ya demostrar que casi todas las funciones subarmónicas son integrables.

Teorema 2.1.11 (Integrabilidad de funciones subarmónicas)**.** *Sea u una función subarmónica en un dominio U de $\mathbb{C}$. Entonces, excluyendo el caso en que $u \equiv -\infty$ en U, $\int_K |u|\, dxdy < \infty$ para cada compacto K de U.*

Demostración. Podemos encontrar una expresión equivalente a la dada por el teorema que facilitará la demostración. Sea la familia de bolas abiertas $\mathcal{B} = \{B(\omega,\rho) \subset U : \omega \in U, \rho > 0\}$, que es claramente un cubrimiento abierto de U. Para cada K compacto de U, existe una subfamilia finita de $\mathcal{B}$, $\mathcal{K}$, que cubre a K, luego

$$\int_K |u|\, dxdy \leq \sum_{B \in \mathcal{K}} \int_B |u|\, dxdy,$$

que es una suma finita. Basta pues demostrar que $\forall \omega \in U$, $\exists \rho > 0$ tal que

$$\int_{B(\omega,\rho)} |u|\, dxdy < \infty. \tag{1}$$

Sea ahora A el conjunto de $\omega \in U$ que cumplen la propiedad (1) y B el conjunto de puntos que no la cumplen. Demostraremos que A y B son abiertos y que $u = -\infty$ en B, luego por ser U conexo o bien $A = U$, lo que demuestra la propiedad, o bien $B = U$, en cuyo caso $u \equiv -\infty$ en U, que es el caso que excluimos.

Sea $\omega \in A$ y elegimos $\rho > 0$ tal que se cumpla (1). Sean $z \in B(\omega,\rho)$ y $\rho' = \rho - |\omega - z|$. Entonces $B(z,\rho') \subset B(\omega,\rho)$ y por tanto

$$\int_{B(z,\rho')} |u|\, dxdy < \infty,$$

en cuyo caso todos los $z \in B(\omega,\rho)$ también están en A. Como esto es un entorno abierto de un punto cualquiera de A, se tiene que A es abierto.

Sea ahora $\omega \in B$ y $\rho > 0$ tal que $D(\omega, 2\rho) \subset U$. Entonces, como $\omega \in B$, se tiene que

$$\int_{B(\omega,\rho)} |u|\, dxdy = \infty.$$

Dado $z \in B(\omega,\rho)$, sea $\rho' = \rho + |\omega - z|$. Entonces $B(\omega,\rho) \subset B(z,\rho')$. Además, u está acotada superiormente en $D(z,\rho')$ por ser el disco compacto y la bola $B(z,\rho')$ es de medida finita. Por todo esto, se tiene que

$$\int_{B(z,\rho')} u\, dxdy = -\infty.$$

Además, se tiene que u satisface la propiedad de la submedia global, luego

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{it})\, dt \quad 0 \leq r < \rho'.$$

Ahora multiplicamos a ambos lados de la desigualdad e integramos respecto a r de 0 a ρ'.

$$\pi\rho'^2 u(z) \leq \int_0^{\rho'} \int_0^{2\pi} ru(z+re^{it})\, dtdr = \int_{B(z,\rho')} u\, dxdy = -\infty.$$

Por tanto, $u = -\infty$ en $B(z,\rho')$. Concluimos que B es abierto y que $u = -\infty$ en B, probando así el resultado. □

A continuación damos un resultado que ilustra bien la flexibilidad de las funciones armónicas. Éste nos permite definir funciones subarmónicas por partes en un abierto de $\mathbb{C}$.

Teorema 2.1.12 (Del encolado)**.** *Sean U, V abiertos de $\mathbb{C}$ tales que $V \subset U$ y $u : U \to \mathbb{R}$, $v : V \to \mathbb{R}$ funciones subarmónicas tales que*

$$\limsup_{z\to\zeta} v(z) \leq u(z), \quad \zeta \in U \cap \partial V.$$

Entonces se tiene que la función

$$\tilde{u} = \begin{cases} \max(u,v) & \text{en } V, \\ u & \text{en } U \setminus V, \end{cases}$$

es subarmónica en U.

Demostración. La función $\tilde{u}$ cumple la propiedad de la submedia local en V porque es el máximo entre dos funciones subarmónicas, que es una función subarmónica. Además, si $D(z_0,\rho) \subset U$, con $z_0 \in U \setminus V$, se da que

$$\tilde{u}(z_0) = u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{u}(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta,$$

luego la propiedad también se cumple en $U \setminus V$. □

Con la teoría desarrollada hasta ahora, estamos preparados para resolver el problema de Dirichlet.

2.2. Solución del problema de Dirichlet

En la sección 1.3 de este trabajo definimos en qué consistía el problema de Dirichlet y dábamos algunos resultados relacionados con él, claro que estando limitados a las herramientas desarrolladas hasta ahí. Dedujimos con ayuda de las propiedades de las funciones armónicas que el problema de Dirichlet, de tener alguna solución, ésta sería única. También resolvimos el problema en el círculo, para el cual siempre podemos encontrar una solución.

El método que estudiaremos para resolver el problema de Dirichlet en un dominio general requiere aplicar una cierta relajación sobre las condiciones del problema. La primera, trabajaremos sobre dominios propios de $\mathbb{C}_\infty$ en vez de trabajar sobre dominios de $\mathbb{C}$. Un dominio propio de un espacio topológico X es un dominio D de X tal que $D \neq X$. Hacer esto no supone una pérdida de generalidad, ya que contamos con que el problema de Dirichlet es invariable ante transformaciones de Möbius.

La segunda generalización consistirá en trabajar con valores en la frontera dados por funciones $\phi : \partial U \to \mathbb{R}$ acotadas, en vez de continuas. El motivo de esta generalización no es otro que el de seguir los pasos establecidos por el método en el que se basa este trabajo. La utilidad de esta relajación surge cuando se intenta encontrar una reformulación del problema de Dirichlet que siempre tenga solución. Este es conocido como el problema de Dirichlet generalizado y es un tema que no se tratará en este documento. El lector interesado puede referir al libro de Ransford [1], Capítulo 4.

Para empezar, veremos una idea básica del llamado método de Perron.

Definición 2.2.1 (Función de Perron)**.** *Sean U un dominio propio de $\mathbb{C}_\infty$ y $\phi : \partial U \to \mathbb{R}$ una función acotada. La función de Perron asociada $H_U\phi : U \to \mathbb{R}$ se define por*

$$H_U\phi(z) = \sup_{u \in \mathcal{U}} u(z), \quad z \in U,$$

donde el supremo se toma sobre las funciones $u \in \mathcal{U}$, siendo $\mathcal{U}$ es la familia de funciones subarmónicas en U tales que

$$\limsup_{z \to \zeta} u(z) \leq \phi(\zeta)$$

para cada $\zeta \in \partial U$.

La importancia de esta función se ilustra en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2. *Sean el dominio propio U de $\mathbb{C}_\infty$ y la función acotada $\phi : \partial U \to \mathbb{R}$. Si el problema de Dirichlet en U con valores en la frontera dados por ϕ tiene solución, $H_U\phi$ será esa solución.*

Demostración. Si h es una solución al problema, entonces claramente $h \in \mathcal{U}$, luego $h \leq H_U\phi$. Por otra parte, como $\limsup_{z\to\zeta}(h(z) - \phi(\zeta)) = 0$ y $\limsup_{z\to\zeta}(u(z) - \phi(\zeta)) \leq 0$ para cualquier $u \in \mathcal{U}$, $\limsup_{z\to\zeta}(u(z) - h(z)) \leq 0$. Luego, por el Teorema 2.1.6 de caracterización de funciones subarmónicas, $u \leq h$ en U, lo que implica que $H_U\phi \leq h$. Concluimos que $H_U\phi = h$. □

Obviamente, el teorema anterior no es suficiente para resolver el problema de Dirichlet, ya que este podría no tener solución. Determinar cuando existe solución al problema es un asunto más complicado, y será desarrollado a continuación.

Observemos un caso en el que el problema no tiene solución.

Ejemplo 2.2.3. *Sean el conjunto $U := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ y la función $\phi : \partial U \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\phi(\zeta) = \begin{cases} 0, & si\ |\zeta| = 1, \\ -1, & si\ |\zeta| = 0. \end{cases}$$

Entonces el problema de Dirichlet en U con valores en la frontera dados por ϕ no tiene solución. En efecto, por el principio del máximo, cualquier función subarmónica u en la familia $\mathcal{U}$ dada en la Definición 2.2.1 va a cumplir que $u \leq 0$, luego $H_U\phi \leq 0$. Por lo enunciado en el Ejemplo 2.1.4, $\epsilon \log |z| \in \mathcal{U}$ para cada $\epsilon > 0$, luego $H_U\phi \equiv 0$ en U, ya que es mayor o igual que el supremo de la familia anterior y ningún elemento de $\mathcal{U}$ puede ser mayor que 0. Vemos que $H_U\phi$ no cumple con las condiciones de frontera exigidas, luego no es solución al problema de Dirichlet. Por el Teorema 2.2.2 vemos que el problema de Dirichlet, en este caso, no tiene solución.

Empezaremos demostrando que $H_U\phi$ es siempre una función armónica real acotada. Antes de enunciar esa propiedad, necesitaremos el siguiente teorema.

Teorema 2.2.4 (Modificación de Poisson)**.** *Sean U un dominio de $\mathbb{C}$, B una bola abierta tal que $\overline{B} \subset U$ y u una función subarmónica en U tal que $u \not\equiv -\infty$. Entonces la función*

$$\tilde{u} = \begin{cases} P_B u & en\ B, \\ u & en\ U \setminus B. \end{cases}$$

es subarmónica en U, armónica real en B y $\tilde{u} \geq u$ en U.

Demostración. La demostración empezará mostrando que la integral sobre ∂B que se hace en $P_B u$ tiene sentido. Después demostraremos que $\tilde{u}$ es armónica en B y que $\tilde{u} \geq u$ y concluiremos demostrando la subarmonicidad en U.

Determinamos B como $B(\omega, \rho)$ con $\omega \in U, \rho > 0$, tales que se cumplan las hipótesis. Como u está acotada superiormente en compactos, podemos restar una constante para asumir, sin pérdida de generalidad, que $u \leq 0$ en

$\overline{B}$. Por el Teorema 2.1.6, para $r < \rho$ y $0 \leq t < 2\pi$ se tiene

$$\begin{aligned} u(\omega + re^{it}) &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\theta - t)} u(\omega + \rho e^{i\theta})d\theta \\ &\leq \left(\frac{\rho - r}{\rho + r}\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\omega + \rho e^{i\theta})d\theta. \end{aligned}$$

Si la última integral fuese $-\infty$, entonces $u \equiv -\infty$ en B, lo que contradice el enunciado del teorema. Por tanto, $P_B u$ es finita.

La teoría desarrollada sobre el núcleo de Poisson también nos dice que $P_B u$ es armónica real en B y, por el Teorema 2.1.6 de caracterización de funciones subarmónicas, $P_B u \geq u$ en B. Esto desemboca inmediatamente en que $\tilde{u} \geq u$.

Para demostrar que $\tilde{u}$ es subarmónica, utilizaremos el teorema del encolado. Para ello, debemos probar la desigualdad

$$\limsup_{z\to\zeta} P_B u(z) \leq u(\zeta), \quad \zeta \in \partial B.$$

Utilizaremos el Teorema auxiliar 2.1.7 para encontrar una serie de funciones continuas ψ_n que decrezcan a u y que cumplan $\lim_{n\to\infty}\psi_n = u$ en ∂B. Entonces, por las propiedades del núcleo de Poisson, se cumple

$$\limsup_{z\to\zeta} P_B u(z) \leq \limsup_{z\to\zeta} P_B \psi_n(z) = \psi_n(\zeta), \quad \zeta \in \partial B.$$

Y, por la definición de ψ_n, $\lim_{n\to\infty}\psi_n = u$, probando el resultado. □

Podemos enunciar ahora el teorema mencionado anteriormente.

Teorema 2.2.5. *Sean el dominio propio U de $\mathbb{C}_\infty$ y la función acotada $\phi : \partial U \to \mathbb{C}$. Entonces la función de Perron $H_U\phi$ es armónica real en U y se tiene que*

$$\sup_{z\in U} |H_U\phi(z)| \leq \sup_{z\in\partial U} |\phi(z)|.$$

Demostración. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que U es un dominio en $\mathbb{C}$. Esto se debe a que podemos utilizar transformaciones de Möbius sobre la esfera para convertir un dominio propio de $\mathbb{C}_\infty$ en un dominio de $\mathbb{C}$. Por ejemplo, tomemos la transformación de Möbius $z \to \frac{1}{z-z_0}$ con $z_0 \in \mathbb{C}\setminus U$.

Sea $\mathcal{U}$ la familia de funciones de la definición de la función de Perron. Si $M = \sup_{z\in\partial U} |\phi(z)|$, entonces $-M \in \mathcal{U}$, por tanto $H_U\phi \geq -M$. Además, por el principio del máximo, $u \leq M$ para cualquier u en $\mathcal{U}$, de lo que concluimos que $H_U\phi \leq M$. Esto prueba que $H_U\phi$ está acotada.

Para probar que $H_U\phi$ es armónica real en U, lo haremos para cada bola B tal que $\overline{B} \subset U$. Fijamos entonces una $B \equiv B(\omega, \rho)$ que cumpla ese requisito y tomamos un punto $\omega_0 \in B$. Por la definición de $H_U\phi$, existe una sucesión de funciones subarmónicas $\{u_n\}_{n\geq 1} \in \mathcal{U}$ tales que $u_n(\omega_0) \to H_U\phi(\omega_0)$ cuando $n \to \infty$. Podemos reemplazar u_n por $\max(u_1, \ldots, u_n)$, la cual también es subarmónica, para poder suponer que la sucesión es, en efecto, creciente en U. Ahora, sea para cada u_n su modificación de Poisson $\tilde{u}_n$ dada en el Teorema 2.2.4. De la Definición 1.2.2 recordamos que

$$P_B u(\omega + re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\frac{\rho}{r}, \theta - t) u(\omega + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

Entonces se ve fácilmente que $\tilde{u}_1 \leq \tilde{u}_2 \leq \ldots$ en U y definiremos $\tilde{u} := \lim_{n\to\infty} \tilde{u}_n$. Por el teorema anterior, cada $\tilde{u}_n$ es subarmónica en U, y se tiene que

$$\limsup_{z\to\zeta} \tilde{u}_n(z) = \limsup_{z\to\zeta} u_n(z) \leq \phi(\zeta), \quad \zeta \in \partial U.$$

Por tanto, $\tilde{u}_n \in \mathcal{U}$ y $\tilde{u}_n \leq H_B\phi$. Esto lleva a que $\tilde{u} \leq H_B\phi$. Además, como $\tilde{u} \geq u$, podemos afirmar que

$$\tilde{u}(\omega_0) = \lim_{n\to\infty} \tilde{u}_n(\omega_0) \geq \lim_{n\to\infty} u_n(\omega_0) = H_U\phi(\omega_0).$$

Luego se cumple que $\tilde{u}(\omega_0) = H_U\phi(\omega_0)$. Además, por ser $\tilde{u}_n$ armónica real en B, vemos que $\tilde{u}$ es armónica real en B también. Para probar esto basta notar que $\tilde{u}_n$ es creciente y tiende a $\tilde{u}$ y ver que por los teoremas de convergencia monótona y de caracterización de funciones armónicas

$$\tilde{u}(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}_n(\omega_0 + re^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(\omega_0 + re^{it}) dt$$

para cualquier r tal que $B(\omega_0, r) \subset B(\omega, \rho)$.

Sean ahora z un punto arbitrario de $B(\omega, \rho)$ y una sucesión $(v_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{U}$ tal que $v_n(z) \to H_U\phi(z)$. Reemplazamos v_n por $\max(v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_n)$ para poder suponer que $v_1 \leq v_2 \leq \ldots$ y que $v_n \geq u_n$ en U. Tomando la modificación de Poisson de v_n, $\tilde{v}_n$, podemos demostrar de forma análoga para $\tilde{v}$ las propiedades de $\tilde{u}$. En particular, estas son

(I) $\tilde{u}, \tilde{v} \leq H_U\phi$ en B;

(II) $\tilde{v}(z) = H_U\phi(z)$ y $\tilde{u}(\omega_0) = H_U\phi(\omega_0)$;

(III) $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ son armónicas en B.

La propiedad (I) implica que $\tilde{v}(\omega_0) \leq H_U\phi(\omega_0) = \tilde{u}(\omega_0)$. Por otra parte, se tiene que $\tilde{v}_n \geq \tilde{u}_n$, que implica que $\tilde{v} \geq \tilde{u}$. Juntando estas dos afirmaciones, se tiene que la función $\tilde{u} - \tilde{v}$, armónica en B, alcanza un máximo local en ω_0, valiendo 0 ahí. Por el principio del máximo, $\tilde{u} - \tilde{v} \equiv 0$ en B, luego $\tilde{u}(z) = \tilde{v}(z) = H_U\phi(z)$. Por ser z arbitrario, hemos probado que $\tilde{u} = H_U\phi$, lo que demuestra, por la propiedad (III), que $H_U\phi$ es armónica real en B, luego lo es en U. □

Volvamos al Ejemplo 2.2.3. En él vemos como una elección de dominio y función de frontera adecuadas impide la resolución del problema. Si analizamos las diferencias de ese ejemplo con el problema de Dirichlet en el círculo, vemos que probablemente sea el dominio elegido lo que determina la existencia de solución, ya que la elección de función no condicionaba la existencia en el problema sobre el círculo. Para hacer de este pálpito un hecho empezaremos introduciendo la definición de barrera.

Definición 2.2.6 (Barrera, punto regular, dominio regular)**.** *Sean U un dominio propio de $\mathbb{C}_\infty$ y $\zeta_0 \in \partial U$. Una barrera en ζ_0 es una función subarmónica b definida en $U \cap N$, donde N es un entorno abierto de ζ_0, tal que*

$$b(z) < 0, \forall z \in U \cap N \quad y \quad \lim_{z \to \zeta_0} b(z) = 0.$$

Diremos que $\zeta \in U$ es regular si existe una barrera en ζ. Si no existe tal función barrera, diremos que es un punto irregular. En caso de que cada punto de ∂U es regular, diremos que U es un dominio regular.

Vamos a continuar con algunos resultados que acabarán por determinar cuándo un problema de Dirichlet tendrá solución. El siguiente es realmente una consecuencia inmediata de la definición de la función de Perron.

Teorema 2.2.7. *Si U es un dominio propio de $\mathbb{C}_\infty$ y $\phi : \partial U \to \mathbb{R}$ es una función acotada, entonces*

$$H_U\phi \leq -H_U(-\phi), \quad en\, U.$$

Demostración. Sean $\mathcal{U}$ la familia de funciones subarmónicas de la definición de la función de Perron para ϕ y $\mathcal{V}$ la familia correspondiente para $-\phi$. Dadas $u \in \mathcal{U}$ y $v \in \mathcal{V}$, se tiene que $u + v$ es subarmónica y cumple

$$\limsup_{z \to \zeta}(u + v) \leq \phi(\zeta) - \phi(\zeta) = 0$$

Entonces, por el Teorema 2.1.5, el principio del máximo para funciones subarmónicas, se tiene que $u + v \leq 0$ en U. Tomando supremos sobre tales u y v, se tiene que $H_U\phi + H_U(-\phi) \leq 0$, probando el resultado. □

El siguiente teorema generaliza ligeramente la noción de barrera.

Lema 2.2.8 (de Bouligand)**.** *Sean ζ_0 un punto regular de la frontera de un dominio U en $\mathbb{C}$, N_0 un entorno abierto de ζ_0 y $\epsilon > 0$. Entonces existe una función subarmónica b_ϵ en U tal que*

$$b_\epsilon < 0 \, en \, U, \quad b_\epsilon \leq -1 \, en \, U \setminus N_0, \quad y \quad \liminf_{z \to \zeta_0} b_\epsilon(z) \geq -\epsilon$$

Para la demostración del teorema anterior necesitamos un resultado sobre medidas de Borel. En el siguiente teorema $\mathfrak{B}_X$ representa la σ-álgebra de Borel en X.

Teorema 2.2.9. *Sea $\mu : \mathfrak{B}_X \to \mathbb{R}$ una medida finita de Borel en un espacio topológico X. Entonces μ es regular, esto es, cada boreliano B cumple que para cada $\epsilon > 0$ existen un abierto A y un cerrado F tales que $F \subset B \subset A$ y $\mu(A \setminus F) < \epsilon$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ la familia de borelianos que cumplan la propiedad enunciada. Demostraremos que $\mathcal{B}$ contiene todos los borelianos, probando que $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra que contiene a todos los abiertos de X. Se ve claramente que $\emptyset$ y X cumplen la propiedad, basta tomar $F = A = \emptyset$ y $F = A = X$, respectivamente. La familia es también cerrada por complementarios, ya que si se cumple la condición dada, entonces $A^c \subset B^c \subset F^c$ y $\mu(F^c \setminus A^c) = \mu(A \setminus F) < \epsilon$. Para demostrar que $\mathcal{B}$ es σ-álgebra nos falta demostrar que $\mathcal{B}$ es cerrada por uniones numerables. Sean $(B_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{B}$ y $\epsilon > 0$. Entonces para cada $n \geq 1$ existen A_n abierto y F_n cerrado tales que $\mu(A_n \setminus F_n) < \epsilon/2^{n+1}$. Sean ahora $A := \cup_1^\infty A_n$ y $F := \cup_1^N F_n$, donde N se elige tal que $\mu(\cup_1^\infty F_n \setminus F) < \epsilon/2$. Esto es posible por ser μ una medida finita. Entonces, A es abierto, F es cerrado, $F \subset \cup_1^\infty B_n \subset A$ y

$$\begin{aligned}
\mu(A \setminus F) &\leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup F^c) \cap (F^c \cup {F_n}^c)\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap {F_n}^c) \cup (F_n \cap F^c)\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus F_n) + \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \setminus F^c\right) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\cup_{n=1}^\infty B_n \in \mathcal{B}$. Esto implica que $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra. Además, por ser los abiertos de X la unión de una sucesión creciente de cerrados, los primeros estarán en $\mathcal{B}$. Concluimos que $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra que contiene a los abiertos de X, luego $\mathcal{B}$ contiene a todos los borelianos de X. $\square$

Demostración del Lema de Bouligand, 2.2.8. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\zeta_0 \neq \infty$. No se pierde generalidad porque podemos aplicar la transformación de Möbius $z \to \frac{1}{z}$ sobre la esfera, que mueve ζ_0 a 0 en caso de que éste sea ∞. Por la definición de punto regular, sabemos que existe un entorno N de ζ_0 y una barrera b en $U \cap N$ que cumple las propiedades citadas en la definición de punto regular.

Sea $B \equiv B(\zeta_0, \rho)$ con $\rho > 0$ tal que $B \subset N \cap N_0$. Entonces la medida normalizada de Lebesgue en ∂B es una medida regular, por el Teorema auxiliar 2.2.9. Por tanto, podemos encontrar un compacto K tal que $K \subset U \cap \partial B$ tal que $L := (U \cap \partial B) \setminus K$ tiene medida Lebesgue $< \epsilon$. Vemos que L es abierto en ∂B, luego la función característica de L, χ_L, es continua en L. Se sigue de las propiedades del núcleo de Poisson que

$$\lim_{\substack{z \to \eta \\ z \in U}} P_B \chi_L(z) = \chi_L(\eta).$$

Sea ahora $m := -\sup_{z \in K} b(z)$. Así, $m > 0$ y $b/m < 0$ en $U \cap \partial B$. Ahora, para $\eta \in U \cap \partial B$,

$$\limsup_{\substack{z \to \eta \\ z \in U \cap B}} \left(\frac{b(z)}{m} - P_B \chi_L(z) \right) = \left\{ \begin{array}{ll} b(\eta)/m - 0, & si\, \eta \in K, \\ b(\eta)/m - 1, & si\, \eta \in L. \end{array} \right\} \leq -1.$$

Podemos definir b_ϵ en U como

$$b_\epsilon := \left\{ \begin{array}{ll} \max\left(-1, (b/m - P_B \chi_L)\right) & en\, U \cap B, \\ -1 & en\, U \setminus B. \end{array} \right.$$

Entonces, por el Teorema 2.1.12, el del encolado, b_ϵ es subarmónica en U. Se tiene que $b_\epsilon < 0$ en U y $b_\epsilon \leq -1$ en $U \setminus N_0$.

Demostrar la última desigualdad probará el resultado.

$$\liminf_{z \to \zeta_0} b_\epsilon(z) \geq \liminf_{z \to \zeta_0} \left(\frac{b(z)}{m} - P_B \chi_L(z) \right) = 0 - P_B \chi_L(\zeta_0) > -\epsilon$$

La última desigualdad surge por ser el núcleo de Poisson una función armónica, luego cumple la propiedad de la media global. Esto implica que el valor de $P_B \chi_L(\zeta_0)$ es el de la medida normalizada de Lebesgue de L. $\square$

Después de probar estos resultados auxiliares, damos a continuación el resultado que nos falta para resolver el problema de Dirichlet.

Teorema 2.2.10. *Sean U un dominio propio de $\mathbb{C}_\infty$, ζ_0 un punto regular de la frontera de U y $\phi : \partial U \to \mathbb{R}$ una función acotada en ∂U y continua en ζ_0 en ζ_0. Entonces*

$$\lim_{z \to \zeta_0} H_U \phi(z) = \phi(\zeta_0).$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como ϕ es continua en ζ_0, existe un entorno abierto N_0 de ζ_0 que cumple que

$$|\phi(\zeta) - \phi(\zeta_0)| < \epsilon, \quad \zeta \in \partial U \cap \overline{N}_0.$$

Tomamos ahora b_ϵ del Lema de Bouligand. Sea $M = \sup_{z \in \partial U} |\phi(z)|$ y definimos

$$u(z) = \phi(\zeta_0) - \epsilon + (M + \phi(\zeta_0)) b_\epsilon(z).$$

Entonces u es subarmónica ya que $M + \phi(\zeta_0) \geq 0$ y la multiplicación de una función subarmónica por una constante positiva sigue siendo subarmónica. Ahora, por darse $b_\epsilon < 0$ en U y $b_\epsilon \leq -1$ en $U \setminus N_0$, se tiene que para $\zeta \in \partial U$

$$\limsup_{z \to \zeta} u(z) \leq \left\{ \begin{array}{ll} \phi(\zeta_0) - \epsilon + 0, & si\ \zeta \in \partial U \cap \overline{N}_0, \\ \phi(\zeta_0) - \epsilon - (M + \phi(\zeta_0)), & si\ \zeta \in \partial U \setminus \overline{N}_0. \end{array} \right\} \leq \phi(\zeta).$$

Por la definición de la función de Perron, se tiene que $u \leq H_B\phi$ en U. En particular, ya que $\liminf_{z \to \zeta_0} b_\epsilon \geq -\epsilon$, se da la desigualdad

$$\begin{aligned} \liminf_{z \to \zeta_0} H_U\phi(z) \geq \liminf_{z \to \zeta_0} u(z) &= \liminf_{z \to \zeta_0} (\phi(\zeta_0) - \epsilon + (M + \phi(\zeta_0)) b_\epsilon(z)) \\ &\geq \phi(\zeta_0) - \epsilon(1 + M + \phi(\zeta_0)) \end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario, se tiene que

$$\liminf_{z \to \zeta_0} H_U\phi(z) \geq \phi(\zeta_0). \tag{1}$$

Si repetimos los razonamientos anteriores podemos dar una demostración análoga para $-\phi$, luego obtenemos que

$$\liminf_{z \to \zeta_0} H_U(-\phi)(z) \geq -\phi(\zeta_0) \Rightarrow \limsup_{z \to \zeta_0} -H_U(-\phi)(z) \leq \phi(\zeta_0).$$

Como $H_U\phi \leq -H_U(-\phi)$, concluimos que

$$\limsup_{z \to \zeta_0} H_U\phi(z) \leq \phi(\zeta_0). \tag{2}$$

Juntando las desigualdades (1) y (2) obtenemos el resultado. □

Corolario 2.2.11 (Solución del problema de Dirichlet)**.** *Sean U un dominio regular propio en $\mathbb{C}_\infty$ y $\phi : \partial U \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe una única función armónica h en U tal que para todo $\zeta \in \partial D$, se cumple que*

$$\lim_{z \to \zeta} h(z) = \phi(\zeta).$$

Demostración. Tomaremos $h = H_U\phi$. Hemos demostrado ya que h es armónica en U. Como ϕ es continua en todos los puntos de ∂U, que son también puntos regulares, por el teorema anterior se cumple que $\lim_{z\to\zeta} h(z) = \phi(\zeta)$ para cualquier $\zeta \in \partial U$. Que h es única está probado en el Teorema 1.3.2. $\square$

Con esto queda demostrado que un dominio regular es una condición suficiente para que exista la solución al problema de Dirichlet. A continuación demostraremos que también es una condición necesaria.

Teorema 2.2.12. *Sea U un dominio de $\mathbb{C}_\infty$ tal que $\mathbb{C}_\infty \setminus U$ contenga al menos dos puntos. Si para un $\zeta_0 \in \partial U$ se da que $\lim_{z\to\zeta_0} H_U\phi(z) = \phi(\zeta_0)$ para cualquier función continua $\phi : \partial U \to \mathbb{R}$, entonces se tiene que ζ_0 es un punto regular.*

Demostración. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\infty \notin \partial U$. En caso de que $\infty \in \partial U$, escogemos un punto $z_1 \in U$ y aplicamos la transformación de Möbius $z \to \frac{1}{z-z_1}$. Sean N un entorno abierto de ζ_0, la función $\psi(\zeta) := -|\zeta - \zeta_0|$ y $b := H_U\psi$. Empecemos demostrando que $b < 0$ en $U \cap N$. Procederemos contemplando dos casos complementarios: $H_U\psi$ constante y $H_U\psi$ no constante.

Si $H_U\psi$ fuera constante, se tendría que, por definición de la función de Perron, $H_U\psi \leq \inf_{\partial U} \psi(\zeta)$, que es negativo porque la frontera tiene más de dos puntos. En otro caso, notamos que $H_U\psi$ es armónica y no es constante, luego alcanza el máximo solamente en la frontera. Como $\psi(\zeta) = -|\zeta-\zeta_0| \leq 0$ es el valor en la frontera, se tiene que $H_U\psi < 0$.

De ambos casos se concluye que $b = H_U\psi < 0$. Por otra parte, ψ es una función continua luego, por hipótesis,

$$\lim_{z\to\zeta_0} H_U\psi(z) = \psi(\zeta_0) = 0,$$

demostrando así el resultado. $\square$

Cerraremos este capítulo dando un criterio para la regularidad de un punto en la frontera. Esto clarificará la idea de dominio regular.

Teorema 2.2.13. *Sean U un dominio propio de $\mathbb{C}_\infty$, $\zeta_0 \in \partial U$ y C la componente conexa de ∂U que contiene a ζ_0. Si $C \neq \{\zeta_0\}$, entonces ζ_0 es regular.*

Demostración. Suponiendo $C \neq \{\zeta_0\}$, escogemos $\zeta_1 \in C \setminus \{\zeta_0\}$. Aplicando la transformación de Möbius $z \to \frac{z-\zeta_0}{z-\zeta_1}$ sobre el enunciado, podemos suponer que $\zeta_0 = 0$ y $\zeta_1 = \infty$. Sabemos que no existe curva cerrada en $\mathbb{C}_\infty \setminus C$ que aisle un punto de C. Esto significa que el teorema de Cauchy se puede aplicar a $\mathbb{C}_\infty \setminus C$. Con esta información en mano, construimos la barrera en ζ_0. Sea la función $h(z) = \log|z|$ definida en $\mathbb{C}_\infty \setminus C$. La función h es, localmente, la parte real de una función holomorfa, luego es armónica. Ya que podemos aplicar el teorema de Cauchy, utilizamos la demostración del Teorema 1.1.3(3) para encontrar una función holomorfa g tal que $h = \Re(g)$ en $\mathbb{C}_\infty \setminus C$. Esto implica que

$$\log|z| = \Re(g(z)) \Rightarrow |z| = e^{\Re(g(z))} = |e^{g(z)}| \Rightarrow |ze^{-g(z)}| = 1.$$

Como $ze^{-g(z)}$ es de módulo constante, se tiene que $ze^{-g(z)} = a$, con a constante. Podemos asumir que $z = e^{g(z)}$, sumando la constante adecuada a g. Claramente, g es una rama holomorfa en $\mathbb{C}_\infty \setminus C$ de $\log z$, luego también será holomorfa en U. Definimos ahora la barrera b en $U \cap B(0,1)$ con la expresión

$$b(z) := \Re(1/g(z)).$$

La función b es continua en $U \cap B(0,1)$ porque el haz discontinuo del logaritmo no está en U, y por el mismo razonamiento, $1/\log z$ es holomorfa ahí. Por tanto, la parte real de ésta es armónica, luego subarmónica. Las otras condiciones de barrera siguen sin dificultad. $\square$

Una consecuencia inmediata de este resultado es el siguiente corolario.

Corolario 2.2.14. *El problema de Dirichlet siempre tendrá solución en una región U de $\mathbb{C}_\infty$ tal que $U \neq \mathbb{C}_\infty$.* $\square$

Capítulo 3

Aplicaciones y relaciones del problema de Dirichlet

Para cerrar este trabajo adecuadamente y para justificar el esfuerzo realizado en desarrollar esta teoría, se enunciarán a continuación varios resultados notables que expanden los contenidos tratados en los capítulos anteriores y los relacionan con temas diversos del Análisis matemático.

3.1. Topología débil y débil-*

Para poder caracterizar las funciones que pueden ser representadas por una integral de Poisson, necesitamos definir los conceptos de topología débil y débil-*. Esta sección no se desprende inmediatamente de la teoría tratada hasta ahora, pero es necesaria para demostrar la caracterización mencionada. Sin embargo, esto no resta de su importancia dentro del Análisis Funcional.

Definición 3.1.1 (Cuerpo topológico, espacio vectorial topológico)**.** *Un cuerpo $\mathbb{K}$ con una topología se dice que es un cuerpo topológico si las operaciones de suma, producto e inversa son continuas. De la misma forma, un espacio vectorial X con una topología es un espacio vectorial topológico si las operaciones de suma y producto por escalares son continuas.*

Definición 3.1.2 (Espacio dual topológico, topología débil)**.** *Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo topológico, X un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{K}$ y X^* el espacio de todas las aplicaciones lineales y continuas de X en $\mathbb{K}$. A X^* se le conoce como el espacio dual topológico de X. La topología débil en X es la topología sobre X menos fina, es decir, con la menor cantidad de abiertos, que hace a toda $f \in X^*$ continua.*

Definición 3.1.3 (Norma en el espacio dual)**.** *Si X es un espacio de Banach y X^* es su espacio dual, consideraremos que la norma de un elemento λ de X^* viene definida por*

$$\|\lambda\| = \sup\{|\lambda(x)| : \|x\| \leq 1\}.$$

Es trivial demostrar que la anterior norma cumple las propiedades pertinentes. Se puede ver que la topología débil de X coincide con la topología generada por las preimágenes de los abiertos de X por los elementos de X^*.

Definición 3.1.4 (Topología débil-*). *Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo topológico, X un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{K}$ y X^* el espacio vectorial de todas las aplicaciones lineales y continuas de X en $\mathbb{K}$. La topología débil-* en X^* es la topología menos fina que hace continuas a las aplicaciones Λ_x, definidos por*

$$\Lambda_x : X^* \to \mathbb{K}, \quad \Lambda_x(f) = f(x).$$

Como en la topología débil, se puede ver que la topología débil-* es la generada por las preimágenes de los abiertos de $\mathbb{K}$ por los Λ_x.

En esta sección solamente necesitamos enunciar y demostrar el llamado Teorema de Banach-Alaoglu. Sin embargo, para la demostración de este teorema necesitamos otro, que enunciamos a continuación.

Teorema 3.1.5 (Arzela-Ascoli). *Sean (X, d) un espacio métrico separable, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} : X \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones equicontinua y puntualmente acotada. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de X.*

Demostración. Por ser X separable, existe $E = \{x_n\}$ numerable denso en X. Sea $S_0 = \mathbb{N}$. Por ser la sucesión $\{f_n\}_{n\in S_0}$ puntualmente acotada, cumple que existe $C(x_1) < \infty$ para $x_1 \in E$ tal que $|f_n(x_1)| \leq C(x_1)$ para todo n, luego la sucesión $\{f_n(x_1)\}_{n\in S_0}$ es acotada. Entonces, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión convergente, cuyos índices denotaremos por $S_1 \subset S_0$, dada por $\{f_n(x_1)\}_{n\in S_1}$. Podemos repetir el argumento para el punto $x_2 \in E$ sobre el conjunto S_1. Es decir, $\{f_n(x_2)\}_{n\in S_1}$ es acotada, luego existe $S_2 \subset S_1$ tal que $\{f_n(x_2)\}_{n\in S_2}$ converge. Observar que $\{f_n(x_1)\}_{n\in S_2}$ también converge. Iterando, obtenemos que para cualquier $m \in \mathbb{N}$ se puede encontrar S_m tal que

$$S_m \subset \cdots \subset S_1 \subset S_0$$

que cumple que $\{f_n(x_j)\}_{n\in S_m}$ converge para $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Sean ahora r_k el k-ésimo índice de S_k y $S = \{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.[1] Entonces, para todo $x_j \in E$ se tiene que $\{f_n(x_j)\}_{n\in S}$ converge, ya que $r_n \in S_j$ para todo $n \geq j$.

Ahora utilizaremos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua. Esto significa que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ tal que $d(x, y) < \delta$ se cumple $|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$. Tomemos pues un compacto $K \subset X$. Se tiene, por la definición de compacidad, que la cantidad de bolas abiertas B_k de

[1]Este proceso de «diagonalización» se conoce como el método diagonal de Cantor.

radio menor que $\delta/2$ cuya unión contiene a K es finita. Por supuesto, para todo $x, y \in B_k$ se cumple $|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$. Como E es denso en X, se tiene que $\{y_j\} := B_k \cap E$ no es vacío y contiene una cantidad numerable de elementos.

Como hemos demostrado que $\{f_n(x_j)\}_{n \in S_m}$ converge, existe N_0 tal que para cualesquier $n, m > N_0$ se da que

$$|f_n(y_j) - f_m(y_j)| < \epsilon$$

Por tanto, para todo $x \in K$, existen una bola $B_{j(x)}$ que contiene a ese x y un $y_j \in B_j \cap E$. Si $n, m > N_0$, se tiene

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_n(y_j)| + |f_n(y_j) - f_m(y_j)| + |f_m(y_j) - f_m(x)| < 3\epsilon.$$

Con lo cual $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$, con lo que converge. Si $f(x)$ es su límite, tomando límite en m en la expresión anterior concluimos que para todo $x \in K$ se cumple

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 3\epsilon$$

para todo $n \geq N_0$. □

Una vez demostrado esto, podemos enunciar el Teorema de Banach-Alaoglu. Para el resultado que vamos a dar solamente necesitamos la primera versión del teorema, dada por Banach.

Teorema 3.1.6 (Banach-Alaoglu). *Sean X un espacio de Banach separable y $\{\lambda_n\}$ una sucesión de elementos de X^* tales que* $\sup_n \|\lambda_n\| = M < \infty$. *Entonces existe una subsucesión $\{\lambda_{n_k}\}$ que converge en la topología débil-* a λ en X^*. Esto equivale a decir que para todo $x \in X$ se cumple que*

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_{n_k}(x) = \lambda(x).$$

Además, $\|\lambda\| \leq M$.

Demostración. De las condiciones del teorema podemos deducir, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cualquier $x \in X$ tal que $\|x\| > 0$, que

$$\|\lambda_n(x)\| = \|x\| \|\lambda_n(\frac{x}{\|x\|})\| \leq M\|x\|.$$

Si $\|x\| = 0$, el resultado anterior es obvio. De esto tenemos que para cualesquiera $x, y \in X$ se da que

$$\|\lambda_n(x) - \lambda_n(y)\| = \|\lambda_n(x - y)\| \leq M\|x - y\|.$$

Por la primera desigualdad, $\{\lambda_n\}$ es puntualmente acotada. Por la segunda desigualdad, $\{\lambda_n\}$ es equicontinua. Como cada punto en un espacio topológico es un compacto se tiene, por el teorema de Arzela-Ascoli, que existe una subsucesión $\{\lambda_{n_k}\}$ que es convergente. Es sencillo comprobar que, como los λ_n son lineales, también lo será λ. Además, como $\|\lambda_n\| \leq M$, se cumple que $\|\lambda\| \leq M$. $\square$

Aunque es un resultado cierto, no se ha demostrado que la convergencia en la topología débil-* equivale a la convergencia puntual. En secciones posteriores también utilizaremos el llamado teorema de representación de Riesz. Este teorema dice que para p, q reales tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, el espacio $(L^p_{2\pi})^* \equiv L^q_{2\pi}$ y para cada elemento $\Lambda \in (L^p_{2\pi})^*$ existe una única función $g \in L^q_{2\pi}$ asociada a Λ que cumple

$$\Lambda(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) f(t) dt.$$

No demostraremos estos hechos porque su desarrollo es verdaderamente extenso y comprometería la extensión de este trabajo.

3.2. Espacios de Hardy del disco

El problema de Dirichlet es estudiado por una rama del Análisis denominada Análisis Armónico, en la cual podemos encontrar también los espacios de Hardy. Éstos permiten caracterizar las funciones que pueden ser representadas como una integral de Poisson.

Sin embargo, también se pueden usar para caracterizar las funciones para las cuales se cumple la fórmula integral de Cauchy y para acotar el operador de la función armónica conjugada, mencionado en el Capítulo 1. Estas dos últimas aplicaciones se enunciarán pero no se podrán demostrar por falta de espacio.

Definición 3.2.1 (Media de orden p, espacio de Hardy, norma p). *Sean $1 \leq p < \infty$, $0 \leq r < 1$ y $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en la bola unidad. Definimos la media de orden p de f con radio r como*

$$M_p(f, r) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right)^{1/p}.$$

Cuando $p = \infty$, ésta se define como

$$M_\infty(f, r) := \max \left\{ |f(re^{it})| : t \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Diremos que f pertenece al espacio de Hardy H^p, ahora con $1 \leq p \leq \infty$, si cumple que

$$\sup_{0 \leq r < 1} M_p(f, r) < \infty.$$

Si $f \in H^p$, se define su norma p como

$$\|f\|_p := \sup_{0 \leq r < 1} M_p(f, r).$$

Definidos estos espacios, veamos cómo la norma de estos aumenta a medida que nos alejamos del centro del disco. Este comportamiento se extiende a funciones subarmónicas continuas.

Teorema 3.2.2. *Sean $u : B(0, 1) \to \mathbb{R}$ una función subarmónica y continua, $r \in [0, 1)$ y*

$$m_r(u) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) dt.$$

Entonces si $0 \leq r_1 < r_2 < 1$, se da que $m_{r_1}(u) \leq m_{r_2}(u)$. En particular, si $f \in H^p$,

$$M_p(f, r_1) \leq M_p(f, r_2).$$

Demostración. Sea h la función armónica que coincide con u en $|z| = r_2$. Esta h existe por la solución del problema de Dirichlet, ya que u es continua. Entonces, para cualquier z que cumpla $|z| \leq r_2$ se tiene que $u(z) \leq h(z)$ por el Teorema 2.1.6 de caracterización de funciones subarmónicas. Por las propiedades de medias en funciones armónicas y subarmónicas, se tiene que

$$\begin{aligned} m_{r_1}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r_1 e^{it}) dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(r_1 e^{it}) dt& \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(r_2 e^{it}) dt = m_{r_2}(u)& \end{aligned}$$

□

Los espacios H^p forman un subespacio cerrado de las funciones armónicas en el disco de crecimiento de medias acotado. Estas son las llamadas funciones de h^p.

Definición 3.2.3 (Clase h^p)**.** *Sea $1 < p < \infty$. Sea $u : B(0, 1) \to \mathbb{R}$ una función armónica real. Diremos que $u \in h^p$ si*

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} |u(re^{it})|^p dt < \infty.$$

Teorema 3.2.4. *H^p es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_p$.*

Demostración. Utilizando la desigualdad de Minkowski, está claro que H^p es cerrado por sumas y productos por escalares, luego es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Volviendo a utilizar esta desigualdad, se tiene

$$M_p(f_1 + f_2, r) \leq M_p(f_1, r) + M_p(f_2, r) \Rightarrow \|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p,$$

con las otras propiedades de las normas siguiendo trivialmente. Ahora demostraremos que H^p es completo. Sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, $\epsilon > 0$, $n, m > N$ con N tal que se cumpla la desigualdad $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$, r y R tales que $0 \leq r < R < 1$ y z tal que $|z| \leq r$. Por la fórmula de Cauchy, tenemos

$$\begin{aligned}
&f_n(z) - f_m(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,R)} \frac{f_n(\omega) - f_m(\omega)}{\omega - z} d\omega \\
&\Rightarrow \sup_{z\in D(0,r)} |f_n(z) - f_m(z)| \leq \sup_{z\in D(0,r)} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |Re^{it}| \frac{|f_n(Re^{it}) - f_m(Re^{it})|}{|Re^{it} - z|} dt \\
&\qquad \leq \frac{R}{R-r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_n(Re^{it}) - f_m(Re^{it})| dt.
\end{aligned}$$

La última desigualdad del apartado anterior se da por ser $z = re^{it}$ el mínimo en el denominador. A continuación, aplicamos la desigualdad de Hölder para las funciones $|f_n(Re^{it}) - f_m(Re^{it})|$ y 1 para los órdenes p y q, siendo q el conjugado de Hölder de p. Hecho esto, se tiene

$$\begin{aligned}
&\frac{R}{R-r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_n(Re^{it}) - f_m(Re^{it})| dt \\
&\qquad \leq \frac{R}{R-r}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_n(Re^{it}) - f_m(Re^{it})|^p dt\right)^{1/p} \\
&\qquad\qquad \leq \frac{R}{R-r}\|f_n - f_m\|_p < \frac{\epsilon R}{R-r}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en cada compacto de $B(0,1)$. Sea f el límite de esta sucesión. La función f es holomorfa en $B(0,1)$. Si $0 \leq r < 1$, para todo ϵ que cumpla $0 < \epsilon < 1$ existe N tal que para todo $n \geq N$ se cumple

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p\right)^{1/p} - \left(\int_0^{2\pi} |f_n(re^{it})|^p\right)^{1/p} \\
&\qquad \leq \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - f_n(re^{it})|^p\right)^{1/p} < \epsilon,
\end{aligned}$$

luego

$$\left(\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p\right)^{1/p} \leq \epsilon + \left(\int_0^{2\pi} |f_n(re^{it})|^p\right)^{1/p}.$$

Como la cantidad de la derecha está acotada por una constante, $f \in H^p$. $\square$

Con esta teoría, llegamos al primer resultado importante del capítulo.

Teorema 3.2.5 (de caracterización de los espacios h^p)**.** *Sea* $1 < p < \infty$. *Se tiene que* $u \in h^p$ *si y solamente si existe* $f \in L^p_{2\pi}$ *tal que*

$$u(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)f(\theta)d\theta, \quad 0 \leq r < 1, t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Empezaremos suponiendo que existe $f \in L^p_{2\pi}$ tal que u es la integral de Poisson de f. Sea $B \equiv B(0,1)$. Supongamos que existe $f \in L^p_{2\pi}$ tal que $u = P_B f$. Del Teorema 1.2.4 obtenemos que para todo $0 \leq r < 1$ se cumple

$$|u(re^{it})|^p \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)|f(\theta)|d\theta\right)^p.$$

Para proceder, observamos que $P(r, \theta - t)$ es una función positiva, luego $P(r, \theta - t)d\theta$ es una medida positiva. Por tanto, por la desigualdad de Hölder y el Teorema 1.2.4 se tiene

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|P(r, \theta - t)d\theta\right)^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p P(r, \theta - t)d\theta.$$

Ahora integramos respecto a t, obteniendo

$$\begin{aligned} |u(re^{it})|^p &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p P(r, \theta - t)d\theta \\ &\Rightarrow \int_0^{2\pi} |u(re^{it})|^p dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p P(r, \theta - t)d\theta dt. \end{aligned}$$

Aplicamos el teorema de Fubini a la parte derecha de la desigualdad, lo cual permite sacar el núcleo de Poisson de la integral y aplicar el Teorema 1.2.4:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p P(r, \theta - t)d\theta dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)dt \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p d\theta < \infty. \end{aligned}$$

Vemos que la última integral no depende de r, luego $u \in h^p$.

Supongamos ahora que $u \in h^p$, $1 < p < \infty$. Supongamos que $u \in h^p$. Sea $\{r_n\}$ una sucesión monótona creciente en $[0, 1)$ tal que $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$. Consideremos la sucesión de funciones $f_n(t) = u(r_n e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$. Como $u \in h^p$, existe una constante $C < \infty$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p \leq C.$$

El teorema de Banach-Alaoglu nos permite concluir que existe una subsucesión de $\{f_n\}$, $\{f_{n_k}\}$, que converge en la topología débil-* a una cierta función $f \in L^p_{2\pi}$. Esto significa, por el comentario dado en la sección anterior sobre el teorema de representación de Riesz, que para toda $\Lambda \in (L^p_{2\pi})^* \equiv L^q_{2\pi}$, con q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene, para la función g asociada a Λ, que

$$\lim_{k\to\infty} \Lambda(f_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) f_{n_k}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) f(t) dt.$$

Como cada función $u(r_{n_k} z)$ es armónica en $B \equiv B(0, r_{n_k}^{-1})$, éstas se pueden representar como una integral de Poisson por el Teorema 1.2.1:

$$u(r_{n_k} r e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) u(r_{n_k} e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) f_{n_k}(\theta) d\theta.$$

Tomamos límite en k, teniendo en cuenta que u es continua en B y la convergencia débil-* de $\{f_{n_k}\}$. El Teorema de convergencia dominada de Lebesgue nos permite tomar el límite sobre el interior de la integral. Como cada $P(r, \theta - t)$ es acotada y los elementos de $\{f_{n_k}\}$ son funciones armónicas que convergen a otra función armónica, también están acotadas globalmente. Con esto, concluimos que

$$u(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) f(\theta) d\theta. \qquad \square$$

El teorema anterior nos permite relacionar cada función armónica con una función de $L^p_{2\pi}$ de forma biyectiva.

En Análisis Complejo, la fórmula integral de Cauchy es un teorema básico y fundamental sobre funciones holomorfas. Sin embargo, se puede demostrar que no solo la cumplen las funciones holomorfas, sino que se puede extender al espacio H^1.

Además, un resultado de Riesz nos dice que cualquier función u armónica real está en h^p si y solamente si su función armónica conjugada v está en h^p también. La función armónica conjugada de u es la función armónica real tal que $f = u + iv$ en el disco, con f holomorfa.

3.3. Teorema de Fatou

En esta sección se va a enunciar y demostrar el Teorema de Fatou, que nos permite extender el valor de las integrales de Poisson a la circunferencia unidad. Con este teorema podremos conocer el comportamiento de las funciones de H^p en la frontera, además de poder extender el problema de Dirichlet encontrando soluciones cuando los valores en la frontera son discontinuos en conjuntos de medida 0.

Para enunciar este teorema, debemos antes exponer un nuevo concepto que traerá consigo algunas propiedades útiles para demostrar el teorema de Fatou.

Definición 3.3.1 (Función de variación acotada)**.** *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo que no sea un punto y una función $F : I \to \mathbb{C}$. Diremos que F es de variación acotada en I si para cualquier partición $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ de I se tiene*

$$\sum_{j=1}^{n} |F(t_j) - F(t_{j-1})| \leq L,$$

con L positivo. Al ínfimo de los valores L que cumplen la desigualdad anterior se le llama variación de F en I y se denota como $V(F, I)$.

Podemos extraer resultados inmediatos de la definición.

Teorema 3.3.2. *Sean F función de variación acotada en (a, b) y la función*

$$V : (a, b) \to [0, \infty), \quad V(x) = V(F, (a, x]), \quad x \in I = (a, b)$$

Entonces V y $G(x) = V(x) - F(x)$ son funciones monótonas crecientes en I. Esto implica que F puede expresarse como la diferencia entre dos funciones mónotonas crecientes y acotadas. El recíproco también es cierto.

Demostración. Sean $x_0 \in I$ y $\mathcal{P}_{(a,x_0]}$ la familia de particiones posibles sobre el intervalo $(a, x_0]$. Entonces

$$V(x_0) = \sup_{\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}\in\mathcal{P}_{(a,x_0]}} \sum_{j=1}^{n} |F(t_j) - F(t_{j-1})|.$$

Sea $\epsilon > 0$ tal que $x_0 + \epsilon < b$. Por ser el valor de V un supremo, se cumple

$$V(x_0 + \epsilon) \geq V(x_0) + |F(x_0 + \epsilon) - F(x_0)| \geq V(x_0).$$

De la misma manera, se tiene

$$G(x_0 + \epsilon) - G(x_0) \geq |F(x_0 + \epsilon) - F(x_0)| - (F(x_0 + \epsilon) - F(x_0)) \geq 0. \quad \square$$

De la misma manera que podemos asociar una función monótona crecientes y continua a la derecha a una medida positiva, podemos relacionar funciones de variación acotada continuas a la derecha con medidas reales. No se demostrará este hecho porque no es trascendental para el estudio que realizamos sobre las funciones de variación acotada.

Teorema 3.3.3. *Sea $I = (a, b)$ un intervalo en $\mathbb{R}$ y $x_0 \in I$. Asociada a cada medida de Borel real μ en I, la función*

$$F(x) = \begin{cases} \mu(x_0, x], & x \geq x_0, \\ -\mu(x, x_0], & x < x_0. \end{cases}$$

es de variación acotada en I y continua por la derecha. Recíprocamente, si F es una función de variación acotada en I, existe una única medida de Borel real μ en I tal que para cada $x, y \in I$, $x \leq y$, se cumple $\mu(x, y] = F(y) - F(x)$.

Observar que este teorema implica que podemos expresar cualquier medida de Borel real como diferencia de dos medidas de Borel positivas. En efecto, si F es de variación acotada, existen dos funciones monótonas crecientes tales que $F = G - H$. Si F es continua a la derecha, G y H también, y además la medida μ_F asociada a F cumple la igualdad $\mu_F = \mu_G - \mu_H$.

Teorema 3.3.4 (Integración por partes)**.** *Sean F y G funciones de variación acotada en un intervalo I, con una de ellas continua en dicho intervalo. Sea $(a, b] \subset I$. Entonces*

$$\int F\, dG + \int G\, dF = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Donde entendemos las integrales como

$$\int F\, dG = \int F\, d\mu_G,$$

con μ_G la medida de Borel real asociada a G.

Demostración. Como las funciones de variación acotada son diferencia de dos funciones monótonas crecientes, podemos asumir que F, G son funciones monótonas crecientes. Asumimos también que G es continua en I. Sea $\Omega = \{(x, y) \in (a, b] \times (a, b] : y > x\}$. Aplicaremos el teorema de Fubini para calcular $\int_\Omega d(F \times G)$ de dos formas distintas. En concreto, evaluaremos primero. Por una parte, tenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega d(F \times G) &= \int_{(a,b]} \left(\int_{(a,y]} dF(x) \right) dG(y) \\ &= \int_{(a,b]} (F(y) - F(a)) dG(y) = \int_{(a,b]} F\, dG - F(a)(G(b) - G(a)). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\int_\Omega d(F\times G) = \int_{(a,b]}\left(\int_{(x,b]} dG(y)\right) dF(x)$$
$$= \int_{(a,b]} (G(b)-G(x))\,dF(x) = G(b)(F(b)-F(a)) - \int_{(a,b]} G\,dF.$$

El resultado del teorema resulta de restar ambas igualdades. □

Teorema 3.3.5 (de Fatou)**.** *Sean μ una medida real de Borel en $(0,2\pi]$, F la función de variación acotada asociada a μ y u definida en $B(0,1)$ por*

$$u(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)d\mu(\theta), \quad 0\le r<1.$$

Si F es derivable en $t\in[0,2\pi]$, se cumple

$$\lim_{r\to 1^-} u(re^{it}) = F'(t).$$

Además, se puede demostrar que esta igualdad se da para casi todo $t\in[0,2\pi]$.

Demostración. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\mu((0,2\pi])=0$, cambiando la función asociada a μ por la función $F(x)-C$, con $C=\mu((0,2\pi])$. De esto sigue que $F(0)=0=F(2\pi)$ y F es 2π-periódica, luego podemos extender F a todo $\mathbb{R}$.

Utilizamos la fórmula de integración por partes del Teorema 3.3.4 sobre $u(re^{it})$:

$$u(re^{it}) = \left(\frac{1}{2\pi}P(r,\theta-t)F(\theta)\right|_{\theta=0}^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial P(r,\theta-t)}{\partial\theta}F(\theta)d\theta.$$

Como $F(0)=F(2\pi)=0$, la primera parte de la resta es 0. Continuamos separando la integral y aplicando un cambio de variable lineal:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial P(r,\theta-t)}{\partial\theta}F(\theta)d\theta$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\partial P(r,\theta)}{\partial\theta}F(\theta+t)d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi}\frac{\partial P(r,\theta)}{\partial\theta}F(\theta+t)d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\partial P(r,\theta)}{\partial\theta}(F(t-\theta)-F(t+\theta))d\theta.$$

La última igualdad surge de hacer el cambio de variable $\theta=2\pi-s$ y utilizando que $\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}$ y F son periódicas de periodo 2π y que $\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}$ es impar en la segunda variable.

Haciendo el cambio de variable $\theta = -s$ sobre la misma integral tomada de $-\pi$ a 0 y utilizando otra vez que $\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}$ es impar en la segunda variable, nos queda

$$u(re^{it}) = \frac{r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(r,\theta) \frac{F(t+\theta) - F(t-\theta)}{2\sin\theta} d\theta,$$

donde $K(r,t)$ viene definida por

$$K(r,t) = -\frac{1}{r} \sin(t) \frac{\partial P(r,t)}{\partial t}.$$

Sabiendo que

$$\frac{\partial P(r,t)}{\partial t} = -\frac{2r(1-r^2)\sin t}{(1-2r\cos t + r^2)^2},$$

Podemos comprobar que $K(r,t)$ cumple las siguientes propiedades:

1. $K(r,t) \geq 0$ para cualquier $t \in (0, 2\pi]$.

2. $K(r,t)$ es integrable en $t \in (0, 2\pi]$ para cualquier r.

3. $\lim_{r \to 1^-} K(r,t) = 0$ uniformemente, para t tal que $0 < \delta \leq |t| \leq \pi$.

Ahora, si F es derivable en θ, se tiene

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{F(t+\theta) - F(t-\theta)}{2t} \frac{t}{\sin t} = F'(t).$$

Finalizamos la demostración con los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} u(re^{it}) - rF'(t) &= \frac{r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(r,t) \left(\frac{F(t+\theta) - F(t-\theta)}{2\sin\theta} - F'(t) \right) d\theta \\ &= \frac{r}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K(r,t) \left(\frac{F(t+\theta) - F(t-\theta)}{2\sin\theta} - F'(t) \right) d\theta \\ &\quad + \frac{r}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} K(r,t) \left(\frac{F(t+\theta) - F(t-\theta)}{2\sin\theta} - F'(t) \right) d\theta. \end{aligned}$$

Si hacemos $r \to 1$ y $\delta \to 0$, ambos sumandos tienden a 0. El límite en casi todo punto se da porque se puede demostrar que una función de variación acotada es derivable en casi todo punto (véase [7] Capítulo 9). □

3.4. Fórmula integral de la solución del problema de Dirichlet en contornos

En esta sección daremos una fórmula para la solución del problema de Dirichlet en regiones que sean un interior de un contorno. Un contorno es una curva de Jordan cerrada y suave a trozos. Para la demostración utilizaremos un corolario del teorema de Green. Enunciamos este corolario a continuación.

Teorema 3.4.1. *Sean G una región de $\mathbb{R}^2$, $f, g : G \to \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{C}^2(G)$ y Γ un contorno cuyo interior está en G. Entonces se cumplen las igualdades*

$$\oint_\Gamma \frac{\partial g}{\partial \eta} ds = \iint_D \Delta g \, dxdy,$$

$$\oint_\Gamma (f \frac{\partial g}{\partial \eta} - g \frac{\partial f}{\partial \eta}) ds = \iint_D (f \Delta g - g \Delta f) dxdy,$$

donde η denota la normal exterior de Γ, Δ el operador Laplaciano y D el interior de Γ.

Demostración. Empezamos demostrando la primera igualdad. Sea $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t)), t \in [0,1]$ una parametrización de Γ que lo recorre en sentido positivo. Entonces η estará parametrizada por la expresión

$$\frac{(\beta_2'(t), -\beta_1'(t))}{\sqrt{\beta_1'(t)^2 + \beta_2'(t)^2}}.$$

Además, se tiene que

$$\frac{\partial g}{\partial \eta} = \nabla g \cdot \eta = \frac{1}{\sqrt{\beta_1'(t)^2 + \beta_2'(t)^2}} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \beta_2'(t) - \frac{\partial g}{\partial y} \beta_1'(t) \right).$$

Concluimos utilzando el teorema de Green sobre la integral

$$\oint_\Gamma \frac{\partial g}{\partial \eta} ds = \oint_\Gamma -\frac{\partial g}{\partial y} dx + \frac{\partial g}{\partial x} dy = \iint_D \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} dxdy.$$

Pasamos a demostrar la segunda igualdad. Repitiendo el razonamiento anterior

$$\oint_\Gamma f \frac{\partial g}{\partial \eta} ds = \oint_\Gamma -f \frac{\partial g}{\partial y} dx + f \frac{\partial g}{\partial x} dy.$$

Utilizando el producto de derivadas, sigue que

$$\oint_\Gamma -f \frac{\partial g}{\partial y} dx + f \frac{\partial g}{\partial x} dy = \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + f \Delta g \right) dxdy.$$

Por un razonamiento análogo, tenemos que

$$-\oint_\Gamma g\frac{\partial f}{\partial \eta}ds = -\iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + g\Delta f\right) dxdy.$$

Sumando ambas ecuaciones, tenemos el resultado. □

Dado este teorema, podemos dar la fórmula que da nombre a la sección.

Teorema 3.4.2 (Fórmula integral de Poisson)**.** *Sean U una región limitada por un contorno Γ y f una función continua en Γ. Entonces la solución del problema de Dirichlet en U con valor en la frontera f viene dada por la fórmula*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma f(z)\frac{\partial}{\partial \eta}(g(z, z_0))ds, \quad z_0 \in U,$$

donde η es la normal interior a Γ y g es la llamada función de Green asociada a U.

Demostración. Por el Corolario 2.2.14, U es un dominio regular, luego existe una función u armónica en U continua en $\overline{U}$ tal que $u(z) = f(z)$ para todo $z \in \Gamma$. El resto de la demostración es para ver que la función u se puede expresar por la fórmula integral de Poisson.

Sean el disco $D(z_0, r) \subset U$, $\gamma_r = \partial D(z_0, r)$ orientado en sentido negativo y $v(z, z_0)$ la solución al problema de Dirichlet en U con valores en la frontera $\log -|z - z_0|$. La función de Green en U es $g(z, z_0) = \log|z - z_0| + v(z, z_0)$. Denotemos $K(z) = g(z, z_0)$ definida en $\overline{U} \setminus \{z_0\}$. Podemos observar que K es armónica real en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Por el Teorema 3.4.1 se tiene que

$$\int_{\Gamma+\gamma_r} \left(u\frac{\partial K}{\partial \eta} - K\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) ds = -\iint_{\widehat{D}} (u\Delta K - K\Delta u) = 0,$$

donde $\widehat{D}$ es la parte de U que está dentro de Γ y fuera de γ_r. La integral se hace 0 por ser u y K armónicas, y el signo negativo delante de la integral doble es para notar que la normal tomada es precisamente la opuesta a la tomada en el Teorema 3.4.1.

Sigue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma \left(u\frac{\partial K}{\partial \eta} - K\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) ds &= \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_r} \left(u\frac{\partial K}{\partial \eta} - K\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{r\to 0^+}\oint_{\gamma_r} \left(u\frac{\partial K}{\partial \eta} - K\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) ds.\end{aligned}$$

Podemos tomar el límite porque las expresiones en las integrales hasta ahora no dependen de r, siempre que éste sea suficientemente pequeño. Aplicando el teorema del valor medio en integrales, tenemos que existe un $\zeta_r \in \partial D(z_0, r)$ tal que

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_r} K(z)\frac{\partial u}{\partial \eta} ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(\gamma_r(t))\frac{\partial u}{\partial \eta}(\gamma_r(t))|\gamma_r'(t)|dt$$
$$= -\frac{2\pi - 0}{2\pi} r \left(\log\frac{1}{r} + v(\zeta_r, z_0)\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}(\zeta_r).$$

La expresión anterior se va a cero cuando $r \to 0^+$. Por otra parte, el vector normal exterior de γ_r es el propio radio en vector, por tanto

$$\frac{\partial K}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\log\frac{1}{r} + v\right) = -\frac{1}{r} + \frac{\partial v}{\partial r}.$$

Por tanto, utilizando el teorema del valor medio de nuevo, tenemos que existe $\zeta_r' \in \partial D(z_0, r)$ tal que

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_r} u\frac{\partial K}{\partial \eta} ds = \lim_{r\to 0^+}\left(1 - r\frac{\partial v}{\partial r}(\zeta_r, z_0)\right)u(\zeta_r') = u(z_0).$$

Hemos utilizado que la curva γ_r se recorre en sentido negativo. Combinando las expresiones y viendo que $u|_\Gamma = f|_\Gamma$ y $K|_\Gamma = 0$, concluimos que

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma}\left(f(z)\frac{\partial g(z,z_0)}{\partial \eta}\right) ds = \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma}\left(u\frac{\partial K}{\partial \eta} - K\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) ds$$
$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{r\to 0^+}\oint_{\gamma_r}\left(u\frac{\partial K}{\partial \eta} - K\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) ds = u(z_0).$$

□

3.5. Teorema de representación de Riemann

Dedicaremos la totalidad de esta sección a enunciar y demostrar el Teorema de representación de Riemann utilizando la solución del problema de Dirichlet, así como el pequeño desarrollo de teoría necesario para alcanzarlo.

Empezaremos demostrando el lema de Schwarz, que será necesario para demostrar el teorema de Riemann.

Lema 3.5.1 (de Schwarz). *Sean $B \equiv B(0,1)$ la bola unidad en $\mathbb{C}$ y $f : B \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$ para $z \in B$.*

Entonces se tiene que $|f(z)| \leq |z|$ *para todo* $z \in B$ *y* $|f'(0)| \leq 1$*. Además, si* $|f(z)| = |z|$ *para algún* $z \neq 0$ *o* $|f'(0)| = 1$*, entonces* $f(z) = az$ *para algún* a *complejo tal que* $|a| = 1$*.*

Demostración. Si f es holomorfa, se puede probar que, al igual que las funciones armónicas, $|f|$ no puede alcanzar un máximo local en B a no ser que f sea constante. Omitiendo por trivialidad el caso $f \equiv 0$, esto se da porque si $|f|$ alcanza un máximo local en $z_0 \in B$, se tiene que $\log |f|$ también alcanzará un máximo local ahí. Sin embargo, como $\log |f|$ es armónica localmente, se tiene que, por el principio del máximo, también es constante localmente. Por tanto, $|f|$ es constante localmente. Sigue de esto que f es constante localmente, luego, por el principio de identidad, constante globalmente. A este hecho se le conoce como el principio del módulo máximo: El módulo de una función holomorfa no constante no puede tener máximos locales en un abierto.

Aplicamos este hecho a la función

$$g(z) := \begin{cases} f(z)/z, & z \neq 0, \\ f'(0), & z = 0, \end{cases}$$

que es holomorfa en todo B. Sea $D \equiv D(0, r), 0 < r \leq 1$. Por el principio del módulo máximo existe z_r en la frontera de D tal que

$$|g(z)| \leq |g(z_r)| = \frac{|f(z_r)|}{|z_r|} \leq \frac{1}{r}.$$

Haciendo $r \to 1$ obtenemos que $|g(z)| \leq 1$, probando la primera parte del resultado.

Si se da que $|f(z)| = |z|$ para algún $z \neq 0$ o $|f'(0)| = 1$, entonces se tiene que $|g| = 1$ en B, luego $g = a$, para alguna constante a tal que $|a| = 1$. Sigue que $f(z) = az$, probando la segunda parte del resultado. $\square$

Teorema 3.5.2 (de representación de Riemann)**.** *Sean* U *una región de* $\mathbb{C}_\infty$ *tal que* $\mathbb{C}_\infty \setminus U$ *contiene al menos dos puntos y un punto* $z_0 \in U$*. Entonces existe una única función holomorfa e inyectiva* f *que transforma* U *en la bola unidad* $B \equiv B(0, 1)$ *tal que* $f(z_0) = 0$ *y* $f'(z_0) > 0$*.*

Demostración. Antes de empezar, suponemos sin pérdida de generalidad que U es una región en $\mathbb{C}$ tal que $\mathbb{C} \setminus U$ contiene al menos dos puntos. Si $z_1 \in \mathbb{C}_\infty \setminus U$, la transformación de Möbius $z \to \frac{1}{z - z_1}$ deja el punto ∞ fuera de U, luego podemos asumir que $U \subset \mathbb{C}$.

Empezaremos demostrando la unicidad de f. Para esto, caracterizaremos las funciones holomorfas de B en B tales que $g(0) = 0$. Por el lema de Schwarz, se tiene que $|g(z)| \leq |z|$, con $z \in B$. Como g^{-1} también tiene estas propiedades, tenemos que $|g^{-1}(z)| \leq |z|$. Como g es un automorfismo de B y las anteriores desigualdades se cumplen para todo $z \in B$, tenemos que

$$|g^{-1}(g(z))| \leq |g(z)| \Rightarrow |g(z)| = |z|.$$

Por tanto, al ser $\frac{|g(z)|}{|z|}$ constante, $\frac{g(z)}{z}$ es constante y se tiene que $g(z) = e^{i\alpha} z$, para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esto implica que si f_1 y f_2 son funciones holomorfas que cumplen las hipótesis del teorema, se tendrá que $\omega(z) = f_1(f_2^{-1}(z))$ es un automorfismo de B. Además, $\omega(0) = 0$ y $\omega'(0) > 0$, luego, por lo demostrado hasta ahora, $\omega(z) = z$, concluyendo que $f_1 = f_2$.

Notemos que por el Corolario 2.2.14, U es un dominio regular. Por tanto, existe una función armónica $u_{z_0}(z)$ que resuelve el problema de Dirichlet en U con valores en la frontera $\log|z - z_0|$. Recordamos de la sección anterior que la función de Green se define por la expresión

$$g_{z_0}(z) := -\log|z - z_0| + u_{z_0}(z), \quad z \in U.$$

Esta función es armónica en $U \setminus \{z_0\}$ porque es una combinación lineal de funciones armónicas, tiene un polo logarítmico en z_0, es continua en $\overline{U}$ y cumple que $g_{z_0}|_{\partial U} \equiv 0$.

Con esto en mano, declaramos que la función que transformará U en B será

$$f_{z_0}(z) = e^{-g_{z_0}(z) - ih_{z_0}(z)},$$

donde h_{z_0} es la función armónica conjugada de g_{z_0}, es decir, para cada región en U, se tiene que existe una función holomorfa k que cumple $k = g_{z_0} + ih_{z_0}$. La armónica conjugada de $-\log|z - z_0|$ es, localmente, $-\arg(z - z_0)$, que es una función multivaluada. La diferencia entre dos ramas de esta función es $2\pi n$, con n entero, luego esta parte no dará problemas para dejar $f_{z_0}(z)$ completamente determinada.

Por otra parte, como por el Corolario 1.1.4 $u_{z_0}(z)$ es infinitamente derivable, utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann podemos encontrar una función conjugada $v_{z_0}(z)$ determinada salvo una constante. Si fijamos $v_{z_0}(z_0) = 0$, v_{z_0} estará completamente determinada. Por tanto, f_{z_0} está bien definida, es univaluada y por tanto holomorfa localmente, ya que la función del exponente es holomorfa localmente. Sigue que f_{z_0} es holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$ y tiene una singularidad evitable en z_0. Completamos $f_{z_0}(z)$ dándole el valor $f_{z_0}(z_0) = 0$, lo que la hace continua en $\{z_0\}$, haciéndola holomorfa en U.

Además, para $\zeta \in \partial U$ se da que $|f_{z_0}(\zeta)| = 1$. Por el principio del módulo máximo, $|f_{z_0}(z)| < 1$, para todo $z \in U$. Veamos ahora que la función $f_{z_0}(z)$ es una función inyectiva en U. Sean $a \neq b$ en U. Como queremos probar que

f_a es inyectiva, debemos probar que si $z \neq b$ en U, entonces $f_a(z) \neq f_a(b)$. Consideremos la función

$$w_a(z,b) = \frac{f_a(z) - f_a(b)}{1 - \overline{f_a(b)} f_a(z)}.$$

Es sencillo ver que para todo $z \in U$, como $|f_a(z)| < 1$, $|w_a(z,b)| < 1$. Ahora, como $f_b(z) = 0$ solamente para $z = b$, se tiene que $w_a(z,b)/f_b(z)$ es una función holomorfa en U. Entonces, el principio del módulo máximo dice que

$$\left| \frac{w_a(z,b)}{f_b(z)} \right| \leq 1, \quad \forall z \in U \tag{1}$$

y que si se cumple la igualdad en algún punto de U, se tiene que cumplir en todo U.

Como $f_a(a) = 0$, evaluando (1) en $z = a$ se tiene que

$$\left| \frac{w_a(a,b)}{f_b(a)} \right| = \left| \frac{f_a(b)}{f_b(a)} \right| \leq 1$$

ya que $w_a(a,b) = -f_a(b)$. Pero podemos intercambiar a y b en los razonamientos anteriores, con lo que concluimos que $|f_a(b)| = |f_b(a)|$. Con esto, hemos demostrado que en el punto $z = a$ se alcanza la igualdad en la desigualdad (1). Por tanto, $|w_a(z,b)| = |f_b(z)|$ para todo $z \in U$. Como $f_b(z) = 0$ solamente si $z = b$, lo mismo debe ocurrir para $w_a(z,b)$. Esto prueba el teorema, porque si $z \neq b$,

$$w_a(z,b) \neq 0 \Rightarrow f_a(z) \neq f_a(b).$$

$\square$

Apéndice A

Transformaciones conformes

En muchas de las demostraciones de los capítulos segundo y tercero de este trabajo se utilizan transformaciones conformes sobre la esfera. En este apéndice se tratarán algunas propiedades de estas transformaciones y una familia de éstas, las transformaciones de Möbius, con tal de atar algunos cabos sueltos que se han ido generando en la escritura del documento.

A.1. Definiciones y propiedades

Definición A.1.1 (Preservación de ángulos)**.** *Sean $f : U_1 \to U_2$ holomorfa, con U_1, U_2 abiertos no vacíos de $\mathbb{C}_\infty$, $z_0 \in U_1$ y un entorno N de z_0 en U_1 tal que para todo $z \in N \setminus \{z_0\}$ $f(z) \neq f(z_0)$. Decimos que f preserva ángulos en z_0 si el límite*

$$\lim_{r\to 0} e^{-i\theta} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)}{|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)|}, \quad (r > 0)$$

existe y no depende de θ.

Diremos que f es una **transformación conforme** si preserva ángulos en cada punto de U_1.

A continuación, daremos una caracterización de las transformaciones conformes.

Teorema A.1.2. *Sean $f : U_1 \to U_2$ holomorfa, con U_1, U_2 abiertos no vacíos de $\mathbb{C}_\infty$ y $z_0 \in U_1$. Entonces, f preserva ángulos en z_0 si y solamente si $f'(z_0) \neq 0$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, suponemos $z_0 = 0$ y $f(0) = 0$. Empezando por la implicación de derecha a izquierda, supongamos que $f'(0) = a \neq 0$. Entonces, es sencillo ver que

$$\lim_{r\to 0} e^{-i\theta} \frac{f(re^{i\theta})}{|f(re^{i\theta})|} = \lim_{r\to 0} \frac{|re^{i\theta}|}{re^{i\theta}} \frac{f(re^{i\theta})}{|f(re^{i\theta})|} = \frac{a}{|a|}.$$

Por tanto, f preserva ángulos en 0. Para la otra implicación, supongamos que $f'(0) = f(0) = 0$. Por tanto, existen g holomorfa con $g'(0) = b \neq 0$ y

$n \geq 2$ tal que $f(z) = z^n g(z)$ en un entorno de 0. Esto se da porque los dos primeros términos de la serie de Taylor de f son 0. Por tanto, se tiene que

$$\lim_{r \to 0} e^{-i\theta} \frac{f(re^{i\theta})}{|f(re^{i\theta})|} = \lim_{r \to 0} e^{-i\theta} \frac{r^n e^{in\theta} g(re^{i\theta})}{|r^n e^{in\theta} g(re^{i\theta})|} = e^{i(n-1)\theta} \frac{b}{|b|}.$$

El límite depende de θ porque $n \geq 2$, luego f no preserva ángulos en 0. Esto demuestra la otra implicación de la demostración. $\square$

A.2. Transformaciones de Möbius

En esta sección del apéndice veremos las transformaciones de Möbius. En cada demostración de este trabajo donde se ha modificado el enunciado del problema usando transformaciones conformes, se han facilitado transformaciones de Möbius aptas para reformular dicho enunciado.

Definición A.2.1 (Transformación de Möbius)**.** *Sean a, b, c, d números complejos tales que $ad - bc \neq 0$. Una transformación de Möbius es una función de la forma*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

tomando dominio en $\mathbb{C}_\infty$.

Es recomendable ver estas transformaciones como movimientos sobre la esfera. Por ejemplo, nótese que $f(-d/c) = \infty$ y $f(\infty) = a/c$. Se puede demostrar que la composición de dos o más de estas funciones vuelve a ser una transformación de Möbius. Seguido de esto último, es sencillo ver que se pueden obtener a partir de la composición de las siguientes transformaciones:

(1) Traslaciones: $z \to z + b$.

(2) Rotaciones: $z \to az, |a| = 1$.

(3) Homotecias: $z \to rz, r > 0$.

(4) Inversiones: $z \to 1/z$.

Por último, damos un ejemplo que conviene tener presente por la flexibilidad que nos ofrece.

Ejemplo A.2.2. *La siguiente transformación de Möbius transforma los puntos $\{a, b, c\}$ en $\{0, 1, \infty\}$, respectivamente.*

$$\psi(z) = \frac{(b - c)(z - a)}{(b - a)(z - c)}.$$

Bibliografía

[1] Thomas Ransford, *Potential theory in the complex plane*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[2] José García-Cuerva and José L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 116, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 104.

[3] Detlef Laugwitz, *Riemann's dissertation and its effect on the evolution of mathematics*, Amer. Math. Monthly **106** (1999), no. 5, 463–469, DOI 10.2307/2589154. Translated from the 1996 German original by Abe Shenitzer, Reprinted from *Bernhard Riemann 1826–1866* [108–110, 124–130, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1999; MR1683937 (2000b:01012)].

[4] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, Third, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[5] Seán Dineen, *The Schwarz lemma*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1989. Oxford Science Publications.

[6] Rolf Nevanlinna and Veikko Paatero, *Introduction to complex analysis*, Translated from the German by T. Kövari and G. S. Goodman, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[7] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Revised English edition. Translated from the Russian and edited by Richard A. Silverman, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1970.